Lista 1

13/04/2005

(1) Seja

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

Prove que $b_k = 0$ para k ímpar, $k > 1$, e calcule b_k para $k \leq 4$.

(2) Seja $A = \{a + bi; a > 0, b > 0, a^2 + b^2 < 1\}$.

Encontre uma bijeção holomorfa f entre A e Δ, o disco unitário aberto com centro na origem.

(3) Sejam $A = \{a + bi; a + b > 0, a - b > 0\}$, $B = \{a + bi; a > 0\}$. Seja X o conjunto das funções holomorfas $f : A \to B$ com $f(1) = 1$.

Encontre o valor máximo de $|f'(1)|$ para $f \in X$.

(4) Sejam γ_1, γ_4 e γ_{10} os círculos positivamente orientados de centro 0 e raios 1, 4 e 10, respectivamente. Seja

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^z}.$$

Calcule

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz, \qquad \int_{\gamma_4} f(z)\,dz, \qquad \int_{\gamma_{10}} f(z)\,dz.$$

(5) Seja $A = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R}, z > 1\}$ e $B = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R}, z > 1 \text{ ou } z < -1\}$.

Encontre uma bijeção holomorfa f entre A e B com $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Calcule $f'(0)$.

(6) Seja Δ o disco aberto de raio 1 com centro na origem. Seja $f : \Delta \to \Delta$ com $f(\pm\sqrt{3}/2) = \pm\sqrt{3}/3$.

Prove que $|f(0)| < \sqrt{3}/2$.