FUNÇÕES MULTIPLICATIVAS E A FUNÇÃO DE MÖBIUS*

Carlos Gustavo. T. de A. Moreira, IMPA & Nicolau Saldanha, PUC-Rio

♦ Nível Avançado

Recordamos inicialmente uma propriedade da função φ de Euler, provada em [2] (Lema 2, página 52). Lembremos que, para n inteiro positivo, $\varphi(n) := \#\{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid a \text{ é invertível módulo } n\} = \#\{k \in \mathbb{Z} \mid 0 \le k < n \text{ e } \operatorname{mdc}(m,n) = 1\}$.

Teorema 1: Para todo natural *n*,

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Prova: Considere as *n* frações

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

e simplifique cada uma delas: obtemos assim, para cada $d|n$, $\varphi(d)$ frações com denominador *d*, donde segue a identidade do enunciado.

Mais formalmente, dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sejam $d = n/(n, a)$ e $a' = a/(n, a)$.
Claramente $\overline{a'} \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$, e definimos assim uma função de $\mathbb{Z}/(n)$ para a união disjunta dos conjuntos $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$, onde *d* varia sobre os divisores de *n*. A inversa desta função leva $\overline{a'} \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$ em $\bar{a}$, com $a = na'/d$, donde a função é uma bijeção ❑

O processo de construir *g* a partir de *f* como

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

é bastante comum em teoria dos números Um fato interessante sobre este tipo de construção é ligado à noção de funções multiplicativas. Dizemos que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é multiplicativa se $mdc(m,n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m) f(n)$. A função φ de Euler, por exemplo, é multiplicativa (ver o corolário da página 47 de [2]). Se *f* é uma função multiplicativa e $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ é a fatoração prima de *n*, então

*** Adaptado do livro Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes), dos mesmos autores([1]).**

$f(n) = \prod_{i=1}^{k} f(p_i^{\alpha_i})$. Além disso, vale a seguinte

Proposição: Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é multiplicativa então $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ é multiplicativa.

Prova: Se $mdc(m,n) = 1, g(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1 d_2) = \sum_{\substack{d_1|m \\ d_2|n}} f(d_1) f(d_2) =$

$$\left(\sum_{d_1|m} f(d_1)\right)\left(\sum_{d_2|n} f(d_2)\right) = g(m)g(n) ❑$$

Note que esta proposição fornece uma nova prova do Teorema 1: pela multiplicidade de $\sum_{d|n} \varphi(d)$, basta provar que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ se *n* é potência de primo, mas se *p* é primo

$$\sum_{d|p^k}\varphi(d)=\sum_{j=0}^{k}\varphi(p^j)=1+\sum_{j=1}^{k}\varphi(p^j)=1+\sum_{j=1}^{k}(p^j-p^{j-1})=p^k.$$

Seria interessante poder inverter em geral identidades do tipo $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$ para escrever f a partir de g. O teorema anterior nos mostra que se fazemos $f = \varphi$ na equação acima temos $g(n) = n$; invertendo esta identidade teríamos uma fórmula para φ. Vamos mostrar como fazer este tipo de inversão.

Definimos a função de Möbius $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ por

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^m, & \text{se } n=p_1p_2\ldots p_m, \text{com } p_1,p_2,\ldots,p_m \text{ primos distintos},\\ 0, & \text{se } n \text{ tem algum fator primo repetido em sua fatoração.}\end{cases}$$

Assim, $\mu(1) = \mu(6) = \mu(10) = 1$, $\mu(2) = \mu(3) = \mu(5) = \mu(7) = -1$ e $\mu(4) = \mu(8) = \mu(9) = 0$. Note que μ é uma função multiplicativa.

Lema: Para todo inteiro positivo n temos

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & \text{se } n=1,\\ 0, & \text{se } n>1.\end{cases}$$

Dem: Como μ é multiplicativa, $h(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$ é multiplicativa.

Temos $h(1) = 1$ e, para cada p primo e $k \geq 1$ inteiro, $h(p^k)=\sum_{j=0}^{k}\mu(p^j)=1+(-1)=0$,

donde, se $n > 1$, $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}\Rightarrow h(n)=h(p_1^{\alpha_1})h(p_2^{\alpha_2})h(p_k^{\alpha_k})=0$ ❑

Teorema 2: (Fórmula de inversão de Möbius) Se para todo $n > 0$ temos

$$g(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

então

$$g(n)=\sum_{d|n}\mu(n/d)g(d).$$

Dem: Basta provar que

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(n/d)\left(\sum_{d'|d} f(d')\right).$$

Mas, escrevendo $d'' = n/d$ e $m = n/d'$ temos

$$\sum_{d|n}\mu(n/d)\left(\sum_{d'|d} f(d')\right)=\sum_{m|n}\left(\sum_{d''|m}\mu(d'')\right)f(n/m)=f(n) \quad ❑$$

Corolário: Para todo natural n, $\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(n/d)d=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}.$

Teorema 1.22: (Segunda fórmula de inversão de Möbius) Sejam f e g funções reais com domínio $(0, +\infty)$ tais que $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 1$. Se

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f\left(\frac{x}{k}\right)$$

para todo x então, para todo x,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) g\left(\frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu(k) g\left(\frac{x}{k}\right).$$

Prova: Basta provar que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \left(\sum_{r=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{kr}\right) \right),$$

mas, tomando $m = kr$ a última soma é igual a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{k|m} \mu(k) \right) f\left(\frac{x}{m}\right) \right),$$

que pelo lema é igual a $f(x)$ ❑

Apesar de não estar relacionada com o resto da nossa discussão, não podemos deixar de mencionar a seguinte conjectura.

Conjectura (Hipótese de Riemann): Se $\alpha > 1/2$ então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{m=1}^{n} \mu(m) = 0.$$

Esta é uma das formulações da famosa hipótese de Riemann, um dos problemas em aberto mais importantes da matemática.
Podemos reenunciar esta conjectura assim: seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 0$ se $t <$ 1 e

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(t/k) = 1, \text{ se } t \geq 1.$$

Então, para todo $\alpha > 1/2$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} = 0.$$

De fato, pela segunda fórmula de inversão de Möbius temos

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\lfloor t \rfloor} \mu(m).$$

[1] Carlos Gustavo T. de A. Moreira e Nicolau Saldanha, Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes), 22º. Colóquio Brasilerio de Matemática IMPA, 1999.

[2] Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Divisibilidade, congruências e aritmética módulo *n*, Eureka! Nº. 2, pp. 41-52.