

PROFMAT — MA11 — PUC-Rio

22 de março de 2012

O teste deve ser feita individualmente, sem consulta.

Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto enumerável.
 - (a) Prove que $X_2 = \{x_1 - x_2; x_1, x_2 \in X\}$ é enumerável.
 - (b) Prove que $X_3 = \{cx; c \in \mathbb{Q}, x \in X_2\}$ é enumerável.
 - (c) Prove que existe um conjunto infinito $Y \subset \mathbb{R}$ tal que os conjuntos $X + y = \{x + y; x \in X\}$, $y \in Y$, são todos disjuntos, isto é, tal que $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ implica $(X + y_1) \cap (X + y_2) = \emptyset$.
2. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
 - (a) O número $\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$ é irracional.
 - (b) Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então cada um dos algarismos $0, 1, \dots, 9$ aparece infinitas vezes na expansão decimal de x .
 - (c) Se cada um dos algarismos $0, 1, \dots, 9$ aparece infinitas vezes na expansão decimal de $x \in \mathbb{R}$ então x é irracional.