C^1- estabilidade de ações compactas de codimensão um do grupo de Heisenberg

Tania Madeleine Begazo Valdivia

Conteúdo

Introdução

Seja G o grupo de Heisenberg, o grupo das matrizes reais triangulares inferiores de diagonal 1, um grupo de Lie nilpotente, não abeliano, simplesmente conexo e de dimensão 3. Nosso objetivo é estudar a C^1-estabilidade de ações à esquerda, compactas, localmente livres de G numa variedade de dimensão 4. Mais precisamente, seja θ uma ação à esquerda, localmente livre de G numa variedade de dimensão 4 tal que todas suas órbitas são compactas. Equivalentemente θ é uma família X_1, X_2, X_3 de campos de vetores linearmente independentes e satisfazendo $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$. Seja $\widetilde{\theta}$ uma outra família próxima satisfazendo as mesmas relações. Perguntamos se $\widetilde{\theta}$ também tem todas suas órbitas compactas: com a C^1-topologia para campos de vetores, em muitos casos (que vamos caraterizar) podemos garantir que todas as órbitas de $\widetilde{\theta}$ são compactas. Estamos supondo que as ações e campos de vetores são suaves.

O estudo da C^1-estabilidade de ações compactas de codimensão 1 no caso que o grupo é $\mathbb{R}^n$ foi feito por N. Saldanha [5]. Ele analisou varios tipos de estabilidade e provou que estes eram equivalentes. O que faremos nesta tese é mostrar que aqueles tipos de estabilidade não são mais equivalentes para ações de G e apresentar alguns resultados sobre L- e T-estabilidade. Vejamos algumas notações e definições básicas.

Seja θ uma ação suave do grupo G na variedade $M = G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ onde H é o subgrupo das matrizes de coeficientes inteiros, um subgrupo discreto co-compacto de G. Suponhamos que θ é da forma

$$\begin{array}{rccc} \theta: & G \times M & \to & M \\ & (g, ([g_1], z)) & \mapsto & ([\phi_z(g) \cdot g_1], z) \end{array}$$

onde ϕ_z é uma família suave a um parâmetro de homomorfismos de G;

chamamos tal ação de *homogênea horizontal*. Usando a identificação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_1 & 1 & 0 \\ y_3 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad \mapsto \quad (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

damos coordenadas (y_1, y_2, y_3) para G. Dado $z \in (-\epsilon, \epsilon)$, definamos subgrupos a 1-parâmetro α_1, α_2, $\alpha_3 : \mathbb{R} \to G$ por:

$$\alpha_1(t) = \phi_z(t, 0, 0), \alpha_2(t) = \phi_z(0, t, 0), \alpha_3(t) = \phi_z(0, 0, t).$$

Então existem matrizes $A_1(z), A_2(z), A_3(z) \in T_I G$ únicas, onde I é a matriz identidade, tais que $\alpha_j(t) = exp(tA_j(z))$, $j = 1, 2, 3$ e satisfazendo $[A_2(z), A_1(z)] = A_3(z), [A_1(z), A_3(z)] = [A_2(z), A_3(z)] = 0$. Denotemos

$$A_j(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{1j}(z) & 0 & 0 \\ a_{3j}(z) & a_{2j}(z) & 0 \end{pmatrix}$$

$j = 1, 2, 3$. Assim, $a_{13}(z) = a_{23}(z) = 0$ e $a_{33}(z) = a_{11}(z)a_{22}(z) - a_{12}(z)a_{21}(z)$. Seja agora $A(z)$ a matriz com entradas $a_{ij}(z)$, a j-esima coluna de A dá as coordenadas de $A_j(z)$ na base de $T_I G$ formada pelas matrizes

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Frequentemente identificaremos $\mathcal{G}$, a álgebra de Lie de G, com $T_I G$. Vamos supor que $A(z)$ é invertível, i.e., $a_{11}(z)a_{22}(z) - a_{12}(z)a_{21}(z) \neq 0$, para todo $z \in (-\epsilon, \epsilon)$. Assim θ é localmente livre e suas órbitas são da forma $G/H \times \{z\}$. Portanto compactas.

Nosso objetivo é estudar alguns tipos de C^1-estabilidade das órbitas da ação homogênea horizontal θ. Vamos introduzir estes conceitos.
Dizemos que a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1 totalmente estável (C^1-T-estável) se para toda vizinhança U da órbita $G/H \times \{0\}$ existe $\delta > 0$ tal que toda família $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ de campos de vetores que geram uma ação local $\widetilde{\theta}$ definida em U com $d_{C^1}(X_j, \widetilde{X}_j) < \delta, j = 1, 2, 3$, tem a propriedade que as órbitas que interceptam $G/H \times \{0\}$ são compactas. Caso contrario, $G/H \times \{0\}$ é dita C^1 totalmente instável (C^1-T-instável).
Dizemos que a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1 localmente instável (C^1-L-instável) se para todo $\delta > 0$ existe uma família $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ de campos de vetores

definidos sobre M, que geram uma ação local $\widetilde{\theta}$, que coincide com θ fora de $G/H \times (-\delta, \delta)$, com $d_{C^1}(X_j, \widetilde{X}_j) < \delta, j = 1, 2, 3$ e tal que as órbitas de $\widetilde{\theta}$ que interceptam $G/H \times \{0\}$ são não compactas. Caso contrario, $G/H \times \{0\}$ é dita C^1 localmente estável (C^1-L-estável).
Mudando a base de $T_I G$ (usando um automorfismo de G, se for necessario) podemos supor que $A(0) = I$. Seja

$$\widehat{A}(z) = \begin{pmatrix} a'_{11}(z) & a'_{12}(z) \\ a'_{21}(z) & a'_{22}(z) \end{pmatrix}$$

Para este tipo de ações θ provaremos que:

Teorema 1. *Se $\widehat{A}(0)$ é nilpotente então a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1-L-instável.*

Teorema 2. *Se*

$$A'(0) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\},$$

então a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1-L-estável e C^1-T-instável.

Teorema 3. *Se $det\widehat{A}(0) \neq 0$ então a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1-L-estável.*

Teorema 4. *Se $\widehat{A}(0)$ não tem autovalores reais então a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1-T-estável.*

As demonstrações dos teoremas sobre instabilidade são relativamente elementares enquanto que as demonstrações dos teoremas sobre estabilidade são a parte principal da tese.

O trabalho está organizado da seguinte maneira.
No primeiro capítulo apresentamos apenas os requisitos necessários com o intuito de fixar os conceitos, enunciados dos principais resultados e as notações conforme serão usadas posteriormente.
O segundo capítulo demonstramos o Teorema 1 e a parte sobre instabilidade do Teorema 2 (a parte de estabilidade será corolário do Teorema 3).
O terceiro capítulo está dedicado ao estudo de pares de funções suaves $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, C^1-próximas da identidade e que comutam com seu comutador $[f, g]$. Mostramos algumas propriedades de $[f, g]$. Assim, na proposição 3.3 provamos que o comutador deve ter pelo menos um ponto fixo. Definimos também o número de rotação relativo e provamos na proposição 3.5 que

se (f, g) tem número de rotação relativo irracional então o comutador é a identidade.
No quarto capítulo provamos o resultado análogo a um teorema muito conhecido em sistemas dinâmicos: Seja X um campo em G/H constante nas coordenadas usuais ou invariante pela ação de G à esquerda tal que cada órbita de X_t é densa. Então o campo X é unicamente ergódico.
No quinto capítulo provamos os Teoremas 3 e 4. Começamos provando alguns resultados auxiliares entre os quais está a proposição 5.4 que é um resultado sobre folheações, e o lema 5.12 que demonstra que nossa ferramenta principal, a transformação linear τ_a, tem imagem constante em retas verticais sobre órbitas.

Capítulo 1

Preliminares

Uma *ação suave* (à esquerda) de um grupo de Lie G numa variedade M é uma aplicação $\theta : G \times M \to M$ de clase C^∞ tal que $\theta(gh, x) = \theta(g, \theta(h, x))$ e $\theta(e, x) = x$ para todo $g, h \in G, x \in M$ onde e é a identidade de G.
A *órbita de um ponto* $x \in M$ pela ação θ é o subconjunto

$$\mathcal{O}_x(\theta) = \{\theta(g, x) \in M : g \in G\}.$$

Dizemos que θ é uma ação compacta quando todas suas órbitas o são.
O *grupo de isotropia de* $x \in M$ é o subgrupo

$$G_x = G_x(\theta) = \{g \in G : \theta(g, x) = x\}.$$

Evidentemente G_x é fechado em G. Dado $x \in M$, a aplicação $\theta_x : G \to M$ dada por $\theta_x(g) = \theta(g, x)$ induz uma imersão injetiva $G/G_x \to M$ cuja imagem é $\mathcal{O}_x(\theta)$. Portanto caso G/G_x seja compacto tal aplicação será um difeomorfismo de G/G_x sobre a órbita de x.
Quando para todo $x \in M$ $\dim\mathcal{O}_x = \dim G$ dizemos que a ação θ é *localmente livre*.

Estamos interessados no caso que G é o grupo de Heisenberg,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_1 & 1 & 0 \\ y_3 & y_2 & 1 \end{pmatrix} : y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

e M uma variedade de dimensão 4. Neste caso, para cada base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $T_I G$ satisfazendo $[v_2, v_1] = v_3, [v_1, v_3] = [v_2, v_3] = 0$, a ação localmente livre $\theta : G \times M \to M$ define uma família X_1, X_2, X_3 de campos de vetores em M:

$$X_i(x) = D\theta_x(I)(v_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

os quais são linermente independentes em cada ponto e satisfazem as relações $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$. Numa variedade aberta, tal família define o que chamamos *ação local.*

Se M é compacta e tem uma métrica Riemanniana suave o espaço das ações em M temuma métrica definida pela correspondente C^r-métrica nos campos de vetores. Mais precissamente, para esta métrica, uma perturbação $\widetilde{\theta}$ de θ é tal que as derivadas até a ordem r de $(\widetilde{X}_i)$ e (X_i) estão próximas em todos os pontos de M. Se M não é compacta, cada subconjunto compacto de M define uma pseudo-métrica e este conjunto de pseudo-métricas definem uma C^r-topologia no espaço dos campos de vetores.

Nosso interese em ações homogêneas horizontais de G, grupo de Heisenberg, na variedade $G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ é justificada pela seguinte proposição.

Proposição 1.1. *Sejam θ uma ação compacta, localmente livre de G em M^4 e F uma órbita de θ. Então existem vizinhanças abertas V de F arbitrariamente pequenas e invariantes pela ação θ. Além disso, V pode ser escolhida de tal forma que exista uma aplicação de recobrimento*

$$\psi : G/H \times (-\epsilon, \epsilon) \to V$$

(com número finito de folhas), e uma ação homogênea horizontal $\widetilde{\theta}$ de G em $G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ tal que

$$\psi(\widetilde{\theta}(g, ([g_1], z))) = \theta(g, \psi([g_1], z)) \tag{1.1}$$

Demonstração: Como as folhas são compactas, a holonomia de F contém no máximo dois elementos, ou seja $\mathrm{Hol}(F) = \{e\}$ ou $\mathbb{Z}/(2)$. Isto implica que existem vizinhanças abertas $V = V(F)$ de F arbitrariamente pequenas e saturadas pela ação θ (ver [1] pag. 71). Mostraremos a segunda afirmação. Suponhamos que F tem holonomia trivial. Caso contrario, consideramos o recobrimento duplo orientavel. Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M^4$ uma caminho suave, transversal à ação em cada ponto e com $\gamma(0) = p_0 \in F$. Vamos construir uma aplicação de recobrimento $\psi : G/H \times (-\epsilon, \epsilon) \to V$. Para isso, coloquemos $\psi([I], z) = \gamma(z)$, $z \in (-\epsilon, \epsilon)$. Definiremos ψ para um ponto arbitrario $([g], z) \in G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ como se segue: seja $G_z \subset G$ o subgrupo de isotropia do ponto $\gamma(z)$, isto é,

$$G_z = \{g \in G : \theta(g, \gamma(z)) = \gamma(z)\}.$$

Como θ é uma ação compacta e localmente livre resulta que G_z é um subgrupo discreto co-compacto. Isto junto com o fato que θ é suave implicam que existem uma família suave a um parametro $(\varphi_z)_{z\in(-\epsilon,\epsilon)}$ de automorfismos de G e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\varphi_z(G_z) = H^{(k)}$$

onde

$$H^{(k)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ w & m & 1 \end{pmatrix} : kw \in \mathbb{Z}, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

Então ponhamos

$$\psi([g], z) = \theta(\varphi_z^{-1}(g), \gamma(z)).$$

Escolhamos $[g], [\tilde{g}] \in G/H$ com $[g] = [\tilde{g}]$, i.e., $g^{-1}\tilde{g} \in H$. Temos que

$$\begin{aligned} \psi([\tilde{g}], z) &= \theta(\varphi_z^{-1}(\tilde{g}), \gamma(z)) \\ &= \theta(\varphi_z^{-1}(gg^{-1}\tilde{g}), \gamma(z)) \\ &= \theta(\varphi_z^{-1}(g) \cdot \varphi_z^{-1}(g^{-1}\tilde{g}), \gamma(z)) \\ &= \theta(\varphi_z^{-1}(g), \theta(\varphi_z^{-1}(g^{-1}\tilde{g}), \gamma(z))) \end{aligned}$$

Como $H \subseteq H^{(k)}$, isto implica que $\varphi_z^{-1}(H) \subseteq G_z$, ou seja, $\varphi_z^{-1}(g^{-1}\tilde{g}) \in G_z$. Assim,

$$\psi([\tilde{g}], z) = \theta(\varphi_z^{-1}(g), \gamma(z)) = \psi([g], z),$$

e portanto, ψ está bem definida. Além disso, é claro que é uma aplicação de recobrimento com k folhas. Ora, definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta} : \quad G \times M &\to \quad M \\ (g, ([g_1], z)) &\mapsto ([\phi_z(g) \cdot g_1], z) \end{aligned}$$

É evidente que $\widetilde{\theta}$ é uma ação suave. Além disso,

$$\begin{aligned} \psi(\widetilde{\theta}(g, ([g_1], z))) &= \psi([\varphi_z(g) \cdot g_1], z) \\ &= \theta(\varphi_z^{-1}(\varphi_z(g) \cdot g_1), \gamma(z)) \\ &= \theta(g \cdot \varphi_z^{-1}(g_1), \gamma(z)) \\ &= \theta(g, \theta(\varphi_z^{-1}(g_1), \gamma(z))) \\ &= \theta(g, \psi([g_1], z)), \end{aligned}$$

o que prova (1.1) e encerra a demonstração da proposição. □

Esta proposição nos diz que a restrição de uma ação compacta a uma vizinhanza de uma órbita pode ser considerada como uma ação homogênea horizontal.

Capítulo 2

Instabilidade

Neste capítulo provaremos os teoremas sobre instabilidade formulados na introdução. Exibiremos C^1-perturbações da ação homogênea horizontal θ que provem L- e T-instabilidade.

Teorema 1. *Se $\widehat{A}(0)$ é nilpotente então a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1-L-instável.*

Teorema 2. *Se*

$$A'(0) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\},$$

então a órbita $G/H \times \{0\}$ é C^1-L-estável e C^1-T-instável.

2.1 L-instabilidade

Nesta seção demonstraremos o Teorema 1. Seja B a matriz cujas entradas são os polinômios de Taylor de ordem 1 das funções a_{ij} no ponto 0, ou seja,

$$B(z) = \begin{pmatrix} 1 + zb_{11} & zb_{12} & 0 \\ zb_{21} & 1 + zb_{22} & 0 \\ zb_{31} & zb_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

onde $b_{ij} = a'_{ij}(0)$. Pela hipótese, $(1+zb_{11})(1+zb_{22})-(zb_{12})(zb_{21}) = 1$. Então a família de matrizes $B(z)$ determinam uma família $\widehat{\phi}_z$ de automorfismos de G. Definamos a ação

$$\widehat{\theta} : (g, ([g_1], z)) \mapsto ([\widehat{\phi}_z(g) \cdot g_1], z),$$

Como $A(z)$ e $B(z)$ estão C^1-arbitrariamente próximas, para ver que θ é C^1-L-instável, basta mostrar que $\widehat{\theta}$ o é. Sejam $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ e $\widehat{X}_3$ campos de vetores em $G \times (-\epsilon, \epsilon)$ dados por

$$\widehat{X}_i(y_1, y_2, y_3, z) = \frac{d}{dt}\widehat{\phi}_z(exp(tE_i)) \cdot (y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Verifica-se facilmente que

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_1(y_1, y_2, y_3, z) &= (1 + zb_{11})\frac{\partial}{\partial y_1} + zb_{21}(\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_3}) + zb_{31}\frac{\partial}{\partial y_3} \\
\widehat{X}_2(y_1, y_2, y_3, z) &= zb_{12}\frac{\partial}{\partial y_1} + (1 + zb_{22})(\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_3}) + zb_{32}\frac{\partial}{\partial y_3} \\
\widehat{X}_3(y_1, y_2, y_3, z) &= \frac{\partial}{\partial y_3}
\end{aligned}$$

Além disso, estes campos de vetores são invariantes pelas transformações de recobrimento $\psi_1, \psi_2 : G \to G$,

$$\begin{aligned}
\psi_1(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) \cdot (1, 0, 0) &= (y_1 + 1, y_2, y_3 + y_2), \\
\psi_2(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) \cdot (0, 1, 0) &= (y_1, y_2 + 1, y_3).
\end{aligned}$$

Portanto definem campos de vetores em $G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$. É fácil ver que

$$[\widehat{X}_1, \widehat{X}_3] = [\widehat{X}_2, \widehat{X}_3] = 0, [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = \widehat{X}_3,$$

isto é, $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_3$ definem a ação $\widehat{\theta}$.
Seja $\begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix}$ um elemento não nulo do núcleo da matriz $\widehat{A}(0)$, ou seja,

$$\begin{cases} b_{11}e_2 - b_{12}e_1 = 0 \\ b_{21}e_2 - b_{22}e_1 = 0 \end{cases}$$

Seja também $(d_1, d_2, d_4) \in \mathbb{R}^3$ satisfazendo a seguinte equação:

$$d_1e_1 + d_2e_2 + d_4(b_{32}e_1 - b_{31}e_2) = 0$$

Podemos escolher $d_4 \neq 0$ pois $\begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \end{pmatrix}$ é não nulo. Para todo $\delta > 0$ definamos em $G \times (-\epsilon, \epsilon)$ os seguintes campos de vetores:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{X}_1(y_1,y_2,y_3,z) &= \widehat{X}_1(y_1,y_2,y_3,z) + c_{11}\psi(z)\frac{\partial}{\partial y_1} + c_{21}\psi(z)(\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_3}) \\
&\quad + c_{41}\psi(z)\frac{\partial}{\partial z} \\
\widetilde{X}_2(y_1,y_2,y_3,z) &= \widehat{X}_2(y_1,y_2,y_3,z) + c_{12}\psi(z)\frac{\partial}{\partial y_1} + c_{22}\psi(z)(\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_3}) \\
&\quad + c_{42}\psi(z)\frac{\partial}{\partial z} \\
\widetilde{X}_3(y_1,y_2,y_3,z) &= \widehat{X}_3(y_1,y_2,y_3,z)
\end{aligned}
$$

onde $c_{ij} = d_i e_j$ e ψ é uma função bump com suporte contido no intervalo $(-\delta,\delta)$ e $\psi(0) > 0$. Os novos campos $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ ainda são invariantes pelas transformações de recobrimento ψ_1 e ψ_2 e portanto definem campos de vetores em $G/H \times (-\epsilon,\epsilon)$. Fazendo-se calculos trabalhosos mas elementares prova-se que

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_3] = [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3] = 0, [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = \widetilde{X}_3,$$

isto é, $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ definem uma ação $\widetilde{\theta}$ de G na variedade $G/H \times (-\epsilon,\epsilon)$. Se escolhemos ψ tal que $\|\psi\|, \|\psi'\| < \delta C$ onde $C = max\{1/|c_{ij}| : c_{ij} \neq 0\}$ então a C^1-distância entre $\widehat{\theta}$ e $\widetilde{\theta}$ é menor que δ. Da definição dos $\widetilde{X}_i^{\prime}$s é claro que nenhuma órbita de $\widetilde{\theta}$ que intercepta $z = 0$ é compacta pois $c_{41} \neq 0$ ou $c_{42} \neq 0$. Isto conclui a prova do Teorema 1. $\square$

2.2 T-instabilidade

Nesta seção provaremos a parte de T-instabilidade do Teorema 2. Para $z \in (-\epsilon,\epsilon)$ consideremos a matriz

$$B(z) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda z} \end{pmatrix}.$$

Esta família de matrizes determinam uma família $\widehat{\phi}_z$ de automorfismos de G. Associemos a ela a ação

$$
\begin{aligned}
\widehat{\theta} : \quad G \times M &\rightarrow M \\
(g, ([g_1], z)) &\mapsto ([\widehat{\phi}_z(g) \cdot g_1], z)
\end{aligned}
$$

Como $B(0) = A(0)$ e $B'(0) = A'(0)$ temos que $B(z)$ e $A(z)$ estão C^1-arbitrariamente próximas. Basta então provar que $\widehat{\theta}$ é C^1-T-instável. Sejam $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ e $\widehat{X}_3$ campos de vetores em $G \times (-\epsilon, \epsilon)$ definidos por

$$\widehat{X}_i(y_1, y_2, y_3, z) = \frac{d}{dt}\widehat{\phi}_z(exp(tE_i)) \cdot (y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Temos então

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_1(y_1, y_2, y_3, z) &= e^{-\lambda z}\frac{\partial}{\partial y_1}, \\
\widehat{X}_2(y_1, y_2, y_3, z) &= e^{2\lambda z}(\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_3}), \\
\widehat{X}_3(y_1, y_2, y_3, z) &= e^{\lambda z}\frac{\partial}{\partial y_3}.
\end{aligned}$$

É fácil ver que estes campos de vetores são invariantes pelas transformações de recobrimento (ψ_1 e ψ_2) definidas na seção anterior e satisfazem as relações $[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = \widehat{X}_3, [\widehat{X}_1, \widehat{X}_3] = [\widehat{X}_2, \widehat{X}_3] = 0$. Logo $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_3$ geram a ação $\widehat{\theta}$. Agora para todo $\delta > 0$ podemos definir em $G \times (-\epsilon, \epsilon)$ os seguintes campos de vetores:

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_1(y_1, y_2, y_3, z) &= \widehat{X}_1(y_1, y_2, y_3, z), \\
\widetilde{X}_2(y_1, y_2, y_3, z) &= \widehat{X}_2(y_1, y_2, y_3, z) - \frac{\delta_1}{\lambda}e^{\lambda z}\frac{\partial}{\partial z}, \\
\widetilde{X}_3(y_1, y_2, y_3, z) &= -\delta_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \widehat{X}_3(y_1, y_2, y_3, z).
\end{aligned}$$

onde $\delta_1 < min\{|\lambda|\delta/(c+1), \delta/(c+1)\}$ e $c = \epsilon/4$ Como pode ser verificado diretamente os novos campos $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ ainda são invariantes pelas transformações de recobrimento e satisfazem as relações

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_3] = [\widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3] = 0, [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = \widetilde{X}_3.$$

Além disso, $d_{C^1}(\widehat{X}_j, \widetilde{X}_j) < \delta, j = 1, 2, 3$ no aberto $G/H \times (-\delta_0, \delta_0)$ onde $\delta_0 < \epsilon$ é escolhido tal que $|z| < \delta_0$ implica $|e^{\lambda z} - 1| < \epsilon/4$. Portanto $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \widetilde{X}_3$ geram uma ação local $\widetilde{\theta}$ definida numa vizinhança de $G/H \times \{0\}$ tal que a C^1-distancia entre $\widetilde{\theta}$ e $\widehat{\theta}$ é menor que δ. Observemos finalmente que as órbitas da perturbação $\widetilde{\theta}$ que interceptam $z = 0$ são não compactas. Logo a órbita $G/H \times \{0\}$ de $\widehat{\theta}$ é T-instável como queriamos mostrar. $\square$

Capítulo 3

Dinâmica Unidimensional Nilpotente

Este capítulo está dedicado ao estudo de pares de funções suaves $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, C^1-próximas da identidade e que comutam com seu comutador $[f, g] = f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$. Mostramos algumas propriedades de $[f, g]$. Provamos inicialmente no lema 3.3 que tal comutador sempre tem pelo menos um ponto fixo. A seguir introduzimos o conceito de número de rotação relativo e vemos na proposição 3.5 que se este número de rotação relativo é irracional então o comutador é a identidade numa vizinhança da origem.

3.1 Pontos Fixos

Um fato importante sobre o comutador que será usado ao longo do capítulo é o seguinte.

Proposição 3.1. *Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞ estritamente crescentes com*

(a) $\|f - id\|_{C^1}, \|g - id\|_{C^1} < \delta$,

(b) $[f, h] = id$ *em* $(-\epsilon + 9\delta, \epsilon - 9\delta)$,

(c) $[g, h] = id$ *em* $(-\epsilon + 9\delta, \epsilon - 9\delta)$,

onde $h = [f, g] : (-\epsilon + 4\delta, \epsilon - 4\delta) \to \mathbb{R}$, então a função h tem ponto fixo.

Demonstração: Sejam $\delta < min\{\epsilon/16, 1/100\}$ e $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ funções de classe C^∞ estritamente crescentes e satisfazendo o item (a). É fácil ver que $(-\epsilon+9\delta,\epsilon-9\delta)\subset dom[f,h]\cap dom[g,h]$. Suponhamos que f e g também satisfazem (b) e (c). Se $f(0)=g(0)=0$ a proposição é evidente. Podemos então supor que $f^{-1}(0)<0\leq g(0)\leq f(0)$. Afirmamos que $f^{-10}(0)<h(0)<f^{10}(0)$. De fato, como f e g são estritamente crescentes, da relação acima obtemos que $0\leq g^{-1}\circ f\circ g(0)$. Há duas possibilidades: $0\leq g^{-1}\circ f\circ g(0)\leq f\circ g(0)$ ou $0\leq f\circ g(0)<g^{-1}\circ f\circ g(0)$. No primeiro caso temos

$$f^{-1}(0)\leq f^{-1}\circ g^{-1}\circ f\circ g(0)=h(0)\leq g(0)\leq f(0).$$

No segundo caso temos $g(0)\leq g\circ f\circ g(0)<f\circ g(0)$. Então, pelo Teorema do Valor Medio,

$$g^{-1}\circ f\circ g(0)-f\circ g(0)\leq\frac{f\circ g(0)-g\circ f\circ g(0)}{1-\delta},$$

como $f\circ g(0)\leq f^2(0)<3f(0)$ resulta que

$$g^{-1}\circ f\circ g(0)-f\circ g(0)<4f(0).$$

Logo $g^{-1}\circ f\circ g(0)<7f(0)$. Mas $9f(0)<f^{10}(0)$ pois $\delta<1/100$. Assim

$$h(0)=f^{-1}\circ g^{-1}\circ f\circ g(0)\in(f^{-10}(0),f^{10}(0)),$$

o que prova a afirmação feita. Podemos agora construir uma copia de S^1 tomando o quociente do intervalo $(f^{-10}(0),f^{10}(0))$ com a relação $z\sim f(z)$. Assim f e h induzem funções $f_1,h_1:S^1\to S^1$ onde $f_1([z])=[f(z)]$ e $h_1([z])=[h(z)]$. Evidentemente f_1 e h_1 estão bem definidas pois f e h comutam. Sejam f_2 e h_2 os levantamentos suaves de f_1 e h_1 para $\mathbb{R}$ com $f_2(x)=x+1$ e c o número de rotação de h_2. Vamos mostrar que $c=0$:

(i) Suponhamos primeiro que c é um número irracional. Pelo Teorema de Denjoy (ver [2]), existe uma conjugação contínua entre h_1 e a correspondente rotação irracional. Levantando esta conjugação obtemos um homeomorfismo crescente $\phi:(f^{-10}(0),f^{10}(0))\to(-10,10)$ tal que $\phi(f(z))=\phi(z)+1$ e $\phi(h(z))=\phi(z)+c$. Definamos as aplicações contínuas $\hat{f},\hat{g},\hat{h}:(-a,a)\to\mathbb{R}$ pondo: $\hat{f}=\phi\circ f\circ\phi^{-1},\hat{g}=\phi\circ g\circ\phi^{-1},\hat{h}=\phi\circ h\circ\phi^{-1}$ onde a é tal que tais composições tenham sentido. Então, pelas relações que satisfazem f,g,h e ϕ, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{f}(x)&=x+1 &&\text{se}\quad x\in(-a,a),\\ \hat{h}(x)&=x+c &&\text{se}\quad x\in(-a,a),\\ \hat{g}(x+c)&=\hat{g}(x)+c &&\text{se}\quad x+c\in(-a,a),\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(x-c) &= \hat{g}(x)-c & \text{se} \quad & x-c \in (-a,a),\\ \hat{g}(x+c+1) &= \hat{g}(x)+1 & \text{se} \quad & x+c+1 \in (-a,a),\\ \hat{g}(x-c-1) &= \hat{g}(x)-1 & \text{se} \quad & x-c-1 \in (-a,a).\end{aligned}$$

Além disso, observemos que se $m, n \in \mathbb{Z}$ são tais que $|mc+n(c+1)| < a/3$ e x com $|x| < a/3$ então $|x+mc+n(c+1)| < a$. Logo, podemos compor $m(\hat{h})'$s com $n(\hat{f}\circ\hat{h})'$s (por exemplo $\hat{h}\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})\circ\cdots\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}^3$) de tal forma que a composição esteja bem definida para x com $|x| < a/3$ e dada numa ordem tal que toda vez que consideremos as composições parcias da forma

$$\underbrace{\hat{h}\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})}_{m_1(\hat{h})'\text{s e } n_1(\hat{f}\circ\hat{h})'\text{s}}\Big|\underbrace{\circ\cdots\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}^3}_{m_2(\hat{h})'\text{s e } n_2(\hat{f}\circ\hat{h})'\text{s}}$$

(no exemplo acima) tenhamos $|m_1c+n_1(c+1)|$, $|m_2c+n_2(c+1)| \leq c+1$, ou seja que estas cantidades estejão bem controladas. Na figura 3.2, o caminho λ nos mostra como é que podemos montar a ordem da composição de tal forma que se cumpram as exigências feitas acima. Observe-se que o caminho λ está na região limitada pelas retas $R^+ : y_1c + y_2(c+1) = c+1$ e $R^- : y_1c + y_2(c+1) = -(c+1)$.

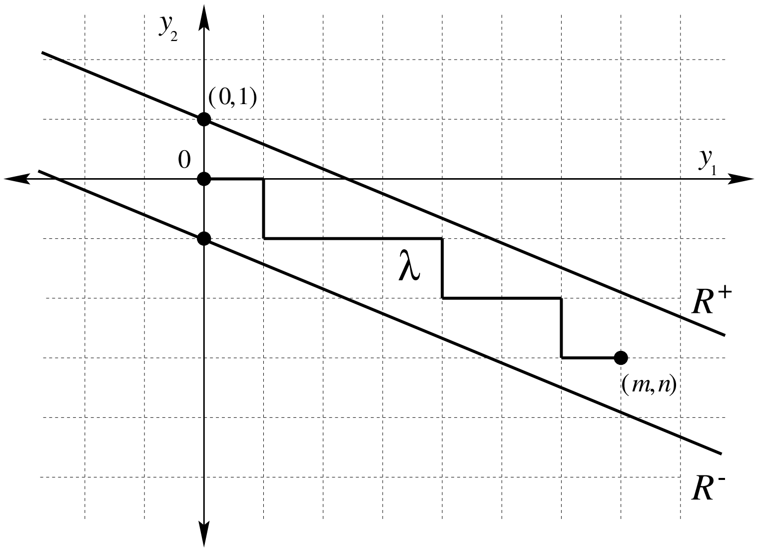

Figura 3.1:

Afirmamos que $\hat{g}(x+mc+n(c+1)) = \hat{g}(x)+mc+n$ para todo x com $|x| < a/3$ e $m,n \in \mathbb{Z}$ tais que $|mc+n(c+1)| < a/3$. Com efeito, como $|x|, |mc+n(c+1)| < a/3$, existe uma composição entre $m(\hat{h})'$s e $n(\hat{f}\circ\hat{h})'$s conforme foi observado acima. Seja $\hat{h}\circ\hat{h}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}$ tal composição. Segue de (3.1) que

$$\begin{aligned}
\hat{g}\circ\hat{h}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}(x) &= (\hat{g}\circ\hat{h}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1})(\hat{h}(x))\\
&= (\hat{g}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1})(x+c)\\
&= (\hat{g}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h})((\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}(x+c))\\
&= (\hat{g}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h})(x+c-(c+1))\\
&\vdots\\
&= \hat{g}(x+mc+n(c+1))
\end{aligned}$$

Mas temos também por (3.1) que

$$\begin{aligned}
\hat{g}\circ\hat{h}\circ\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}(x) &= \hat{g}\circ\hat{h}(\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}(x))\\
&= \hat{g}(\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}(x)+c)\\
&= \hat{g}(\hat{h}\circ\cdots\circ\hat{h}\circ(\hat{f}\circ\hat{h})^{-1}\circ\hat{h}(x))+c\\
&\vdots\\
&= \hat{g}(x)+mc+n
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{g}(x+mc+n(c+1)) = \hat{g}(x)+mc+n$$

o que mostra a afirmação. Ora, observemos que tomando $m,n \in \mathbb{Z}$ com $|m|, |n|$ muito grandes e $|mc+n(c+1)| << 1$ ainda temos que $\hat{g}(x+mc+n(c+1)) = \hat{g}(x)+mc+n$ para x muito próximo de 0, o que é um absurdo pois neste caso $|mc+n|$ é muito grande e $\hat{g}$ é uma função crescente. Consequentemente c não pode ser um número irracional.

(ii) Suponhamos agora que c é um número racional não nulo. Então, existem $z_0 \in (f^{-1}(0), f(0))$ e $p,q \in \mathbb{Z}-\{0\}$ tais que $h^q(z_0) = f^p(z_0)$. Logo, podemos construir um homeomorfismo crescente $\phi : (f^{-10}(0), f^{10}(0)) \to (-10,10)$ tal que

$$\begin{aligned}
\phi(f(z)) &= \phi(z)+1,\\
\phi(h^r(z)) &= \phi(h^{r-1}(z))+c,
\end{aligned}$$

para todo $z \in \{f^n(z_0) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{h^m(z_0) : n \in \mathbb{Z}\}$ onde $c = p/q$ e $\phi(z_0) = 0$. Procederemos como acima, definamos as aplicações $\hat{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}, \hat{g} = \phi \circ g \circ \phi^{-1}, \hat{h} = \phi \circ h \circ \phi^{-1}$. Então para todo x

$$x + \frac{p}{q} - \frac{1}{q} < \hat{h}(x) < x + \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$$

$$x + n + m\frac{p}{q} - \frac{1}{q} < \hat{f} \circ \hat{h} \circ \hat{f}^{-1} \circ \cdots \circ \hat{h}(x) < x + n + m\frac{p}{q} + \frac{1}{q}$$

onde $\hat{f} \circ \hat{h} \circ \hat{f}^{-1} \circ \cdots \circ \hat{h}$ é a composta de $m(\hat{h})'$s e $n(\hat{f})'$s, a qual é dada numa ordem tal que cada composição parcial esteja bem definida. Ora, seja $\hat{f} \circ \hat{h}^{-1} \circ \cdots \circ \hat{f}^{-1} \circ \hat{h}$ uma composta entre $(-q)(\hat{h})'$s e $p(\hat{f})'$s a qual esteja bem definida em 0. Então $\hat{g} \circ (\hat{f} \circ \hat{h}^{-1} \circ \cdots \circ \hat{f}^{-1} \circ \hat{h})(0) = \hat{g}(0)$. Como $g \circ f = h^{-1} \circ f \circ g$ e $g \circ h = h \circ g$ resulta que

$$\hat{h}^{-1} \circ \hat{f} \circ \hat{h}^{-1} \circ \cdots \circ \hat{f}^{-1} \circ \hat{h}(\hat{g}(0)) = \hat{g}(0)$$

onde o lado esquerdo da igualdade é a composta entre $(-p-q)(\hat{h})'$s e $p(\hat{f})'$s. Portanto

$$\hat{g}(0) + p - (p+q)\frac{p}{q} - \frac{1}{q} < \hat{g}(0) < \hat{g}(0) + p - (p+q)\frac{p}{q} + \frac{1}{q}.$$

Segue daí que $-\frac{p^2}{q} - \frac{1}{q} < 0 < -\frac{p^2}{q} + \frac{1}{q}$, o que é um absurdo pois $p \neq 0$. Assim $c \notin \mathbb{Q} - \{0\}$.
Portanto de (i) e (ii) segue que $c = 0$. Ora, sendo 0 o número de rotação de h_1 resulta que h_1 tem ponto fixo e consequentemente h também. $\square$

3.2 Número de Rotação Relativo

Doravante fixaremos $\epsilon > 0$ e consideraremos $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ nas condições da proposição anterior com $delta < min\{\epsilon/16, 1/100\}$. Para $m, n \in Z$ definamos a família de funções parcias

$$\mathcal{F}(n,m) = \Big\{ \varphi^*_{(n,m)} = g^{m_k} \circ f^{n_k} \circ \cdots \circ g^{m_1} \circ f^{n_1}; n_1, m_1, \ldots, n_k, m_k \in \mathbb{Z}, \sum_{j=1}^{k} n_j = n, \sum_{j=1}^{k} m_j = m \Big\}$$

Observemos que os elementos de $\mathcal{F}(n,m)$ são construidos de tal forma que a composição $g^{m_k} \circ f^{n_k} \circ \cdots \circ g^{m_1} \circ f^{n_1}$ faça sentido. Para $\mathcal{F}(n,m)$ temos que:

Lema 3.2. *Uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(i) *Toda* $\varphi^*_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n,m)$ *satisfaz* $\varphi^*_{(n,m)}(x) > x$ *para todo* x*,*

(ii) *Toda* $\varphi^*_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n,m)$ *tem ponto fixo,*

(iii) *Toda* $\varphi^*_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n,m)$ *satisfaz* $\varphi^*_{(n,m)}(x) < x$ *para todo* x*.*

Demonstração: Sejam $\varphi^1_{(n,m)}$, $\varphi^2_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n,m)$. Como f e g comutam com $h = f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ g$ resulta que

$$\varphi^i_{(n,m)} \circ h = h \circ \varphi^i_{(n,m)} \tag{3.2}$$

para $i = 1, 2$. Além disso, é fácil ver que existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\varphi^2_{(n,m)} = \varphi^1_{(n,m)} \circ h^r. \tag{3.3}$$

Mostraremos inicialmente que se $\varphi^1_{(n,m)}$ tem ponto fixo então $\varphi^2_{(n,m)}$ também tem ponto fixo. Seja x_1 um ponto fixo de $\varphi^1_{(n,m)}$. Pela proposição 3.3, existem x^- e x^+ pontos fixos de h que escolhemos como sendo os mais próximos de x_1 tais que $x^- \leq x_1 \leq x^+$. Podemos supor $x^- \neq x_1$ e $x^+ \neq x_1$ (caso contrario, pela igualdade 3.3, x_1 seria também ponto fixo de $\varphi^2_{(n,m)}$). Vejamos que acontece quando aplicarmos $\varphi^1_{(n,m)}$ ao intervalo (x^-, x^+): como $\varphi^1_{(n,m)}$ é um homeomorfismo crescente então

$$\varphi^1_{(n,m)}(x^-, x^+) = (\varphi^1_{(n,m)}(x^-), \varphi^1_{(n,m)}(x^+)).$$

Ora, pela igualdade (3.2) temos que $\varphi^1_{(n,m)}$ e $(\varphi^1_{(n,m)})^{-1}$ levam pontos fixos de h em pontos fixos de h. Então os únicos pontos fixos de h no intervalo $(\varphi^1_{(n,m)}(x^-), \varphi^1_{(n,m)}(x^+))$ são precisamente $\varphi^1_{(n,m)}(x^-)$ e $\varphi^1_{(n,m)}(x^+)$. Mas

$$x_1 = \varphi^1_{(n,m)}(x_1) \in (\varphi^1_{(n,m)}(x^-), \varphi^1_{(n,m)}(x^+)).$$

Então $\varphi^1_{(n,m)}(x^-) = x^-$. Caso contrario, $x^- < \varphi^1_{(n,m)}(x^-)$ implica que $\varphi^1_{(n,m)}(x^-) \in (x^-, x^+)$, ou seja, h tem ponto fixo em (x^-, x^+), o que é um absurdo. Analogamente, o caso $x^- > \varphi^1_{(n,m)}(x^-)$ conduz a uma contradição. Assim, x^- é ponto fixo de $\varphi^1_{(n,m)}$ e portanto, pela igualdade (3.3), x^- é também ponto fixo de $\varphi^2_{(n,m)}$.

Suponhamos agora que $\varphi^1_{(n,m)}(x) > x$ para todo x. Pelo mostrado acima resulta que $\varphi^2_{(n,m)}$ não pode ter pontos fixos. Isto significa que $\varphi^2_{(n,m)}(x) > x$

para todo x ou $\varphi^2_{(n,m)}(x) < x$ para todo x. Mas, da igualdade (3.3), obtemos que $\varphi^2_{(n,m)}(x_1) = \varphi^1_{(n,m)}(x_1)$ para x_1 ponto fixo de h. Portanto $\varphi^2_{(n,m)}(x) > x$ para todo x. Analogamente, prova-se que se $\varphi^1_{(n,m)}(x) < x$ para todo x então $\varphi^2_{(n,m)}(x) < x$ para todo x. Como $\varphi^1_{(n,m)}$ e $\varphi^2_{(n,m)}$ são arbitrarias conclui a demonstração do lema. □

Vamos agora supor também que as funções f e g consideradas acima não tem pontos fixos simultaneos. Então em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos

$$\begin{aligned} C &= \Big\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \varphi^*_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n,m) \text{ satisfaz (i) do lema 3.2 }\Big\}, \\ D &= \Big\{(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \varphi^*_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n,m) \text{ satisfaz (iii) do lema 3.2 }\Big\}, \end{aligned}$$

estão bem definidos (lema 3.2) e são não vazios, como se deduz da observação 1 embaixo. Seja $L_{(f,g)}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que separa C e D. Como $h = \varphi_{(0,0)}$ tem ponto fixo resulta que $(0,0) \in L_{(f,g)}$. Além disso, usando a prova do lema 3.2, não é dificil mostrar que $L_{(f,g)}$ é uma reta. Frequentemente denominaremos a $L_{(f,g)}$ *reta da direção quase horizontal relativa a f e g*. A figura 3.2 ilustra o caso em que $L_{(f,g)}$ tem coeficiente angular 1/2.

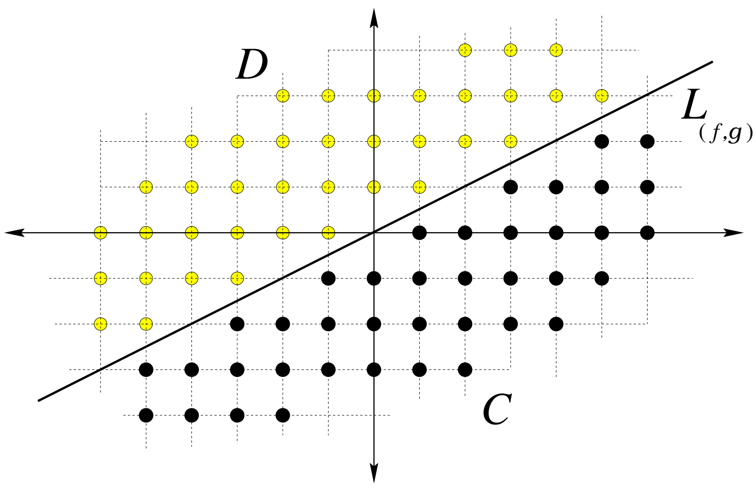

Figura 3.2: Reta $L_{(f,g)}$ separando os conjuntos C e D.

Definição 3.3. *Se $L_{(f,g)}$ não é uma reta vertical chamamos de número de rotação relativo de (f,g) ao coeficiente angular de $L_{(f,g)}$. Caso contrario, definamos o número de rotação relativo de (f,g) como sendo ∞*

Uma propriedade importante de $L_{(f,g)}$ será dada na proposição 3.4. Antes faremos duas observações uteis.

Observação 1: O fato de f e g não ter pontos fixos simultaneos implica que f ou g não tem ponto fixo. De fato, seja p um ponto fixo de g. Usando o mesmo argumento feito na prova do lema 3.2 podemos supor que p é também ponto fixo de h. Devemos mostrar que f não tem ponto fixo. Suponhamos que q é o ponto fixo de f mais próximo de p. Por hipótese $p \neq q$. Consideremos o caso que $p < q$. Sem perda de generalidade podemos supor que $f(x) > x$ para todo $x \in (p,q)$. Então $q = \lim_{k\to\infty} f^k(p) = \lim_{k\to\infty} f^k(g(p)) = \lim_{k\to\infty} g \circ f^k \circ h(p) = \lim_{k\to\infty} g(f^k(p)) = g(\lim_{k\to\infty} f^k(p)) = g(q)$, o que é um absurdo pois f e g não tem pontos fixos simultaneos.

Observação 2: Dado $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, cada aplicação do tipo $g^{m_k} \circ f^{n_k} \circ \cdots \circ g^{m_1} \circ f^{n_1}$ onde $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ e $\sum_{j=1}^{k} m_j = m$, determina um único caminho $\lambda_{(n_1,m_1,\ldots,n_k,m_k)}$ em $\mathbb{R}^2$ que liga a origem ao ponto (n,m) da seguinte forma: partindo da origem percorremos horizontalmente n_i unidades seguidas de m_i unidades na direção vertical de maneira alternada desde $i=1$ até $i=k$ terminando este processo no ponto (n,m). O caminho $\lambda_{(n_1,m_1,\ldots,n_k,m_k)}$ será denominado *caminho retangular*. Um exemplo de um tal caminho é mostrado na figura seguinte.

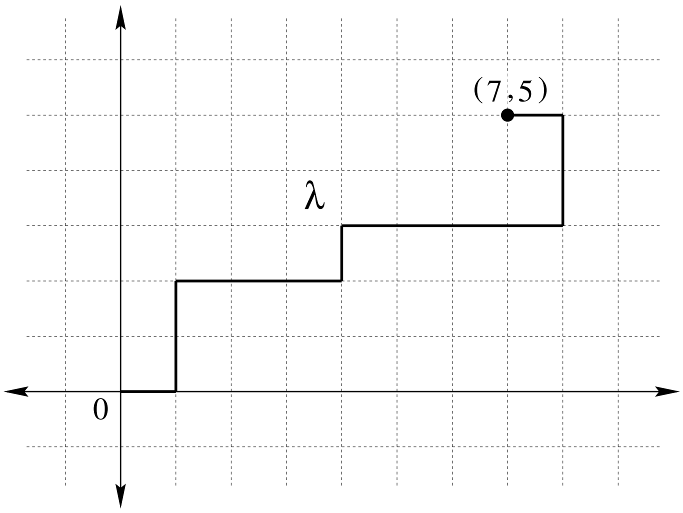

Figura 3.3: $\lambda = \lambda_{(1,2,3,1,4,2,-1,0)}$ representa $f^{-1} \circ g^2 \circ f^4 \circ g \circ f^3 \circ g^2 \circ f$

Proposição 3.4. *Sejam $\epsilon > 0$, $R > 1$. Existe $\delta > 0$ tal que para todo par de funções $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ estritamente crescentes, satisfazendo as seguintes condições:*

- *f e g não tem pontos fixos simultaneos,*
- *$\|f - id\|_{C^1}, \|g - id\|_{C^1} < \delta$,*
- *$[f, h] = id$ em $(-\epsilon + 9\delta, \epsilon - 9\delta)$,*
- *$[g, h] = id$ em $(-\epsilon + 9\delta, \epsilon - 9\delta)$,*

onde $h = [f, g] : (-\epsilon+4\delta, \epsilon-4\delta) \to \mathbb{R}$ e dados $n, m \in \mathbb{Z}$ com $d\big((n, m), L_{(f,g)}\big) < R$, tem-se que existe $\varphi_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n, m)$ tal que

- *$(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset dom\, \varphi_{(n,m)}$,*
- *$\varphi_{(n,m)}(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset (-\epsilon/2, \epsilon/2)$.*

Demonstração: Fixemos $\epsilon > 0$, $R > 1$ e tomemos $0 < \delta < min\{\epsilon/32R, \delta_1\}$ onde δ_1 é dada pela proposição 3.3. Sejam $f, g : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ e $(n, m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nas condições do lema. Pela observação 1 podemos supor que f não possui pontos fixos. Então consideremos $f(x) > x$ para todo $x \in (-\epsilon, \epsilon)$. A fim de simplificar a exposição dividiremos a prova em dois casos.

Caso 1: Suponhamos que g possui algum ponto fixo. Então $L_{(f,g)}$ é vertical. Pela hipótese sobre f, n e a escolha de δ resulta que $f^j(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset (-9\epsilon/32, 9\epsilon/32)$ para todo $j = \pm1, \ldots, \pm n$. Como g tem pontos fixos nos intervalos $(-\epsilon/2, -9\epsilon/32)$ e $(9\epsilon/32, \epsilon/2)$ então $g^i\big(f^n(-\epsilon/4, \epsilon/4)\big) \subset (-\epsilon/2, \epsilon/2)$ para todo $j = \pm1, \ldots, \pm m$, isto é, a aplicação $\varphi_{(n,m)} = g^m \circ f^n$ está definida no intervalo $(-\epsilon/4, \epsilon/4)$ e $\varphi_{(n,m)}(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset (-\epsilon/2, \epsilon/2)$ o qual prova a proposição.

Caso 2: Suponhamos agora que g não possui pontos fixos. Vamos considerar $g(x) < x$ para todo $x \in (-\epsilon, \epsilon)$. Então a reta $L_{(f,g)}$ está contida nos quadrantes I e III. Sejam

$$
\begin{aligned}
L^+_{(f,g)} &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (\alpha, -1) \geq 0\Big\} \\
L^-_{(f,g)} &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (\alpha, -1) < 0\Big\}
\end{aligned}
$$

onde $\alpha > 0$ é o número de rotação relativo de (f, g). Seja também

$$
A = \Big\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (n, m) \in L^+_{(f,g)} \text{ e } (n-1, m+1) \in L^-_{(f,g)}\Big\}
$$

Demonstraremos primeiro que para todo $(n, m) \in A$ o lema é verdadeiro. Mas precisamente, provaremos que se $\lambda_{(n,m)}$ e $\lambda_{(n-1,m+1)}$ são os caminhos retangulares mais próximos de $L_{(f,g)}$ que ligam a origem aos pontos (n, m) e $(n-1, m+1)$ e que pretencem aos subespaços $L^+_{(f,g)}$ e $L^-_{(f,g)}$ respectivamente (ver figura 3.4), então as aplicações $\varphi_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n, m)$ e $\varphi_{(n-1,m+1)} \in \mathcal{F}(n-1, m+1)$ associadas aos caminhos $\lambda_{(n,m)}$ e $\lambda_{(n-1,m+1)}$ satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset dom\, \varphi_{(n,m)} \cap dom\, \varphi_{(n-1,m+1)}$,

(ii) $\varphi_{(n,m)}(-\epsilon/4, \epsilon/4), \varphi_{(n-1,m+1)}(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset (-3\epsilon/8, 3\epsilon/8)$,

(iii) $\varphi_{(n,m)}(x) > x$ para todo x ou $\varphi_{(n,m)}$ tem ponto fixo,

(iv) $\varphi_{(n-1,m+1)}(x) < x$ para todo x.

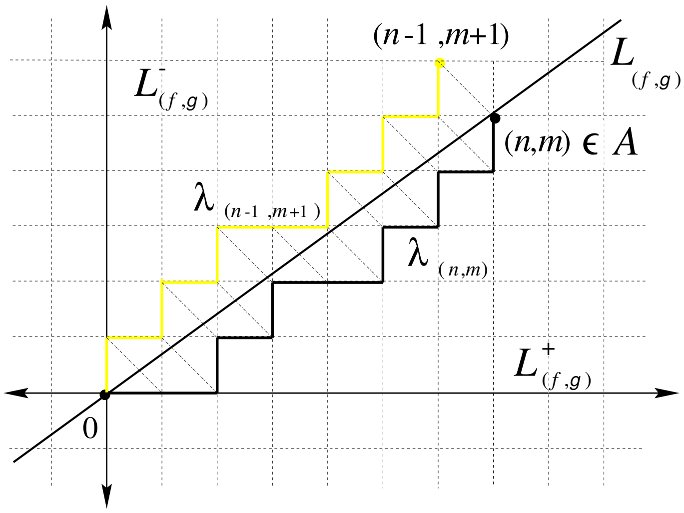

Figura 3.4:

Observemos que existe uma correspondencia natural entre os elementos de A e $\mathbb{Z}$. Provaremos, por indução, que para $(n, m) \in A^+ = A \cap \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ se cumprem as condições acima. O caso em que $(n, m) \in A^- = A \cap \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-$ é feito de forma análoga. Evidentemente para $(n, m) \in A^+$ tal que $n + m \leq 2$ as aplicações $\varphi_{(n,m)}$ e $\varphi_{(n-1,m+1)}$ determinadas pelos caminhos $\lambda_{(n,m)}$ e $\lambda_{(n-1,m+1)}$ satisfazem (i) e (ii). Os items (iii) e (iv) são consequencia do fato que $(n, m) \in C \cup L_{(f,g)}$ e $(n - 1, m + 1) \in D$ onde C e D estão definidos apos do lema 3.2. Agora suponhamos que para $(n_0, m_0) \in A^+$ as aplicações $\varphi_{(n_0,m_0)} \in \mathcal{F}(n,m)$ e $\varphi_{(n_0-1,m_0+1)} \in \mathcal{F}(n_0-1, m_0+1)$, determinadas pelos caminhos $\lambda_{(n_0,m_0)}$ e $\lambda_{(n_0-1,m_0+1)}$ satisfazem (i),(ii),(iii) e (iv). Então (n_0+1, m_0) ou (n_0, m_0+1) pertence a A^+. Se $(n_0+1, m_0) \in A^+$ vamos mostrar que as aplicações

$$\begin{aligned}
\varphi_{(n_0+1,m_0)} &= f \circ \varphi_{(n_0,m_0)}, \\
\varphi_{(n_0,m_0+1)} &= f \circ \varphi_{(n_0-1,m_0+1)},
\end{aligned}$$

satifazem as propriedades desejadas. De fato, $\varphi_{(n_0,m_0)}$ e $\varphi_{(n_0-1,m_0+1)}$ satisfazem (i) e (ii), então

$$(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset dom f \circ \varphi_{(n_0,m_0)} \cap dom\, f \circ \varphi_{(n_0-1,m_0+1)}$$

o que prova (i). Para provar (ii) observemos que como $f(x) > x$ e $g(x) < x$ para todo x resulta que

$$f^{-1} \circ g \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x) < g \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x) < \varphi_{(n_0,m_0)}(x) < f \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x)$$

para todo x. Decorre daí que

$$|f \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x) - f^{-1} \circ g \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x)| < 3\delta < 3\epsilon/32$$

pois $\delta < \epsilon/32$. Mas $f^{-1} \circ g \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x) < x$ pois $\varphi_{(n_0-1,m_0+1)}(x) < x$. Portanto devemos ter $|f \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x)| < 3\epsilon/8$ para todo $x \in (-\epsilon/4, \epsilon/4)$. Temos também que

$$-3\epsilon/8 < \varphi_{(n_0-1,m_0+1)}(x) < x < \epsilon/4$$

para todo $x \in (-\epsilon/4, \epsilon/4)$. Então

$$-3\epsilon/8 < f \circ \varphi_{(n_0-1,m_0+1)}(x) < \epsilon/4 + \delta < 3\epsilon/8$$

para todo $x \in (-\epsilon/4, \epsilon/4)$ pois $f(x) > x$ e $\delta < \epsilon/32$. De modo que $f \circ \varphi_{(n_0,m_0)}$ e $f \circ \varphi_{(n_0-1,m_0+1)}$ satisfazem (ii). Como $(n_0+1, m_0) \in L^+_{(f,g)}$ e $(n_0, m_0+1) \in L^-_{(f,g)}$, devemos ter $f \circ \varphi_{(n_0,m_0)}(x) > x$ para todo x e $f \circ \varphi_{(n_0-1,m_0+1)}(x) < x$ para todo x o que prova os items (iii) e (iv). No caso em que $(n_0, m_0+1) \in A^+$ prova-se de forma análoga que as aplicações

$$\begin{aligned}
\varphi_{(n_0,m_0+1)} &= g \circ \varphi_{(n_0,m_0)}, \\
\varphi_{(n_0+1,m_0+2)} &= g \circ \varphi_{(n_0-1,m_0+1)},
\end{aligned}$$

satisfazem as mesmas propriedades. Conclui-se assim que, para $(n,m) \in A$, $\varphi_{(n,m)}$ e $\varphi_{(n-1,m+1)}$ satisfazem as propriedades (i),(ii),(iii) e (iv).
Vejamos agora o caso geral $(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $d\big((n,m), L_{(f,g)}\big) < R$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $(n,m) \in L^{+}_{(f,g)}$. Então existe $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$ tal que $(\tilde{n}, m) \in A$ e $|\tilde{n} - n| < 2R$ ou existe $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$ tal que $(n, \tilde{m}) \in A$ e $|m - \tilde{m}| < 2R$. Consideremos somente o primeiro caso. Como $(\tilde{n}, m) \in A$ vimos que existe $\varphi_{(\tilde{n},m)} \in \mathcal{F}(\tilde{n}, m)$ tal que $\varphi_{(\tilde{n},m)}(x) \in (-3\epsilon/8, 3\epsilon/8)$ para todo $x \in (-\epsilon/4, \epsilon/4)$. Além disso, já que $2R\delta < \epsilon/16$ e $f(x) > x$ para todo x tem-se que $|f^k \circ \varphi_{(\tilde{n},m)}(x)| < \epsilon/2$ para todo $x \in (-\epsilon/4, \epsilon/4)$ onde $|k| = |\tilde{n} - n|$. Logo a aplicação

$$\varphi_{(n,m)} = f^k \circ \varphi_{(\tilde{n},m)} \in \mathcal{F}(n,m)$$

esta definida no intervalo $(-\epsilon/4, \epsilon/4)$ e $\varphi_{(n,m)}(-\epsilon/4, \epsilon/4) \subset (-\epsilon/2, \epsilon/2)$, o que conclui a prova do lema. $\square$

3.3 O Caso Irracional

Vimos na seção 3.1 que o comutador de f e g deve ter um ponto fixo. Mas no caso que o número de rotação relativo seja irracional obtemos um melhor resultado como mostra a proposição.

Proposição 3.5. *Se o número de rotação relativo de (f,g) é irracional então $h = id$ num intervalo aberto contendo 0.*

Demonstração: Por absurdo, suponhamos que $h(0) > 0$. Nosso objetivo será construir uma aplicação $\hat{g} : S^1 \to S^1$ de classe C^∞ com número de rotação irracional e que tem um ponto cuja orbita não é densa em S^1, o que contradiz o Teorema de Denjoy. Para fazer isto, consideremos $f^{-10}(0) < h(0), g(0) < f^{10}(0)$ (como visto na proposição). Podemos construir uma parametrização $\phi : \big(f^{-10}(0), f^{10}(0)\big) \to (-10, 10)$ de classe C^∞ tal que as aplicações $\tilde{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}, \tilde{g} = \phi \circ g \circ \phi^{-1}, \tilde{h} = \phi \circ h \circ \phi^{-1}$ são de classe C^∞ e satisfazem o seguinte: $\tilde{f}(x) = x + 1, [\tilde{f}, \tilde{h}] = [\tilde{g}, \tilde{h}] = id$ e $(\tilde{f}, \tilde{g})$ tem número de rotação relativo irracional. Seja agora (a,b) o intervalo maximal ao redor de 0 tal que $\tilde{h}(x) > x$ para todo $x \in (a,b)$. Como h e f comutam, $\tilde{f}(a,b) = (a+1, b+1)$ é o intervalo maximal ao redor de 1 tal que $\tilde{h}(x) > x$ para todo $x \in \tilde{f}(a,b)$. Observemos que a e b são pontos fixos de $\tilde{h}$, isto implica que $\tilde{f}(a) = a+1$ e $\tilde{f}(b) = b+1$ são também pontos fixos de $\tilde{h}$. Logo $b < a+1$. Nestas condições podemos construir a aplicação $\hat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mencionada acima. Começamos definindo $\hat{g}(x) = \tilde{g}(x)$ para todo $x \in (b, a+1)$. Depois, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{g}(x) = \tilde{g}(x-n) + n$ se $x \in (b+n, a+n+1)$. Agora no intervalo $[a, b]$ definimos $\hat{g}(x) = \psi(x)$ onde ψ é uma aplicação de classe C^∞ tal que $\hat{g}|_{(b-1,a+1)}$ é de classe C^∞. Finalmente, nos intervalos $[a+n, b+n]$ definimos $\hat{g}(x) = \psi(x-n)+n$. Pela forma como foi definida $\hat{g}$ vemos que é de classe C^∞ com $\hat{g}(x+1) = \hat{g}(x)+1$ e tem número de rotação irracional o qual é igual ao de $\tilde{g}$ pois a órbita do ponto a não foi alterada. Além disso, a órbita de a não intercepta os intervalos da forma $(a+n, b+n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ pois ao ser a um ponto fixo de $\tilde{h}$ tem-se que $\tilde{g}(a), \tilde{g}^2(a), \tilde{g}^3(a), \ldots$ são também pontos fixos de $\tilde{h}$ e não podem estar nos intervalos maximais $(a+n, b+n)$. Então $\hat{g}$ contradiz o Teorema de Denjoy. Portanto devemos ter $h = id$ num intervalo aberto contendo 0. $\square$

Capítulo 4

Ergodicidade

O objetivo deste capítulo é mostrar um resultado análogo a um teorema muito conhecido em sistemas dinâmicos. Provaremos que se X é um campo de vetores em G/H, constante nas coordenadas usuais e tal que cada órbita do fluxo X_t é densa então X é unicamente ergódico.
Conforme veremos na seção 4.2 para provar isso necesitaremos estudar um certo difeomorfismo no toro T^2 e provar que tal difeomorfismo é unicamente ergódico.

4.1 Difeomorfismos em T^2

Nesta seção apresentamos um exemplo de um difeomorfismo no toro $T^2 = S^1 \times S^1$ que preserva a medida de Haar e é unicamente ergódico, isto é, a medida de Haar é a única medida invariante do difeomorfismo.

Proposição 4.1. *Seja*

$$\begin{array}{rcl} \phi : S^1 \times S^1 & \to & S^1 \times S^1 \\ (z, w) & \mapsto & (\alpha z, zw) \end{array}$$

onde $S^1 \subset \mathbb{C}$ *e* $\alpha = e^{2\pi c}$, $c \notin \mathbb{Q}$. *Então* ϕ *é unicamente ergódica.*

Demonstração: Nesta demonstração usaremos as idéias do Teorema das diferenças de Van der Corput [3]:
Seja (x_n) *uma seqüência de números reais. Se para todo* h *inteiro positivo a seqüência* $(x_{n+h} - x_n)$, $n = 1, 2, ...$, *está uniformemente distribuida modulo 1, então* (x_n) *está uniformemente distribuida modulo 1.*

Para provar que ϕ é unicamente ergódica devemos mostrar que se $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}$ é contínua então a sequencia

$$g_N = \frac{1}{N}(f + f \circ \phi + f \circ \phi^2 + \ldots + f \circ \phi^{N-1}) \tag{4.1}$$

tende uniformemente para uma constante (a integral de f). Vejamos primeiro que é suficiente verificar a propriedade quando f é um polinómio de Laurent em duas variáveis. Com efeito, dada f no caso geral tomamos $f_n \to f$ uma sequencia de polinómios (como acima) tendendo uniformemente para f. Sejam $a_n = \int_{T^2} f_n$, $a = \int_{T^2} f$ então $a_n \to a$. Dado $\epsilon > 0$ escolhamos n_0 tal que $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \epsilon/3$. Então $|a_{n_0} - a| < \epsilon/3$. Logo

$$\left\| \frac{1}{N}(f + \ldots + f \circ \phi^{N-1}) - \frac{1}{N}(f_{n_0} + \ldots + f_{n_0} \circ \phi^{N-1}) \right\|_\infty < \epsilon/3$$

para todo $N > 0$. Como f_{n_0} é um polinómio de Laurent em duas variáveis

$$\left\| \frac{1}{N}(f_{n_0} + \ldots + f_{n_0} \circ \phi^{N-1}) - a_{n_0} \right\|_\infty < \epsilon/3$$

para N suficientemente grande. Assim, pela desigualdade triangular, resulta que

$$\left\| \frac{1}{N}(f + \ldots + f \circ \phi^{N-1}) - a \right\|_\infty < \epsilon,$$

ou seja, $g_N \to a$ uniformemente, como queriamos mostrar. Ora, seja f um polinómio de Laurent em duas variáveis. Como $f(z, w) = \sum_{n,m=0}^{k} b_{nm} z^n w^m$, é suficiente verificar a propriedade quando f é um monómio. Então suponhamos que $f(z, w) = z^n w^m$, $z, w \in \mathbb{C}$. É fácil provar por indução que

$$f \circ \phi^j(z, w) = \alpha^{jn + \frac{1}{2}j(j-1)m} z^{n+jm} w^m$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo se $n = m = 0$ temos a propriedade de maneira trivial. Então, se $m = 0$ e $n \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
g_N(z, w) &= \frac{1}{N}(z^n + \alpha^n z^n + \alpha^{2n} z^n + \ldots + \alpha^{(N-1)n} z^n) \\
&= \frac{1}{N}(1 + \alpha^n + \alpha^{2n} + \ldots + \alpha^{(N-1)n}) z^n \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{\alpha^{Nn} - 1}{\alpha^n - 1}\right) z^n
\end{aligned}$$

Como $|z| = |\alpha| = 1$ resulta que $(\alpha^{Nn} - 1)z^n/(\alpha^n - 1)$ é limitado. Logo $g_N \to 0$ uniformemente quando $N \to \infty$. Finalmente se $m \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} g_N(z,w) &= \frac{1}{N}\big(z^n + \alpha^n z^{n+m} + \ldots + \alpha^{jn+\frac{1}{2}j(j-1)m} z^{n+jm} + \\ &\quad \ldots + \alpha^{(N-1)n+\frac{1}{2}(N-1)(N-2)m} z^{n+(N-1)m}\big) w^m \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $g_N \to 0$ uniformemente quando $N \to \infty$. Seja $\mathbb{C}^N$ o espaço das N-uplas de números complexos munido com seu produto interno usual. Consideremos em $\mathbb{C}^N$ as N-upla's

$$\mathbf{w} = (w^{-m}/\sqrt{N}, \ldots, w^{-m}/\sqrt{N})$$

e

$$\mathbf{z} = (\frac{z^n}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{\alpha^{jn+\frac{1}{2}j(j-1)m} z^{n+jm}}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{\alpha^{(N-1)n+\frac{1}{2}(N-1)(N-2)m} z^{n+(N-1)m}}{\sqrt{N}}).$$

Como $\big|g_N(z,w)\big| = \big|\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle\big|$, devemos mostrar que $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle \to 0$ uniformemente. Para fazer isto, definamos a aplicação $R_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ por

$$R_N(z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}) = (z_1, \ldots, z_{N-1}, z_0)$$

Um simple cálculo mostra que para k $(0 < k < N)$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle R_N^k \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle &= \frac{1}{N}\Bigg(\Big(\frac{\alpha^{(N-k)km} - 1}{\alpha^{km} - 1}\Big)\alpha^{kn+\frac{1}{2}k(k-1)m} z^{km} + \big(\alpha^{-\frac{1}{2}(N-k)(N-k-1)m} \\ &\quad + \ldots + \alpha^{-\frac{1}{2}(N-1)(N-2)m}\big)\alpha^{(N-k)(-n)} z^{(N-k)(-m)}\Bigg) \end{aligned}$$

Sendo $|\alpha| = |z| = 1$, o primeiro e o segundo somando do lado direito da igualdade acima são limitados. Logo, fazendo $N \to \infty$ resulta que $\langle R_N^k \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \to 0$ (note-se que a convergencia não depende do ponto z).
Sejam agora $\epsilon > 0$ e $M > 4/\epsilon^2$. Pelo que acabamos de mostrar, existe $N_0 > M$ tal que

$$\big|\langle R_N \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle\big|, \big|\langle R_N^2 \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle\big|, \ldots, \big|\langle R_N^{M-1} \mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle\big| < \frac{1}{M},$$

para todo $N > N_0$. Então

$$\begin{aligned} \big|\mathbf{z} + R_N\mathbf{z} + \ldots + R_N^{M-1}\mathbf{z}\big| &= \sqrt{\langle \mathbf{z} + \ldots + R_N^{M-1}\mathbf{z}, \mathbf{z} + \ldots + R_N^{M-1}\mathbf{z}\rangle} \\ &\leq \sqrt{M + \frac{1}{M}(M^2 - M)} \\ &\leq \sqrt{2M} \end{aligned}$$

pois $|R_N^k \mathbf{z}| = 1$ e $|\langle R_N^i \mathbf{z}, R_N^j \mathbf{z}\rangle| = |\langle R_N^{i-j}\mathbf{z}, R_N \mathbf{z}\rangle|$ para $0 \leq k, i, j \leq N-1$ $(i \neq j)$. De modo que

$$\begin{aligned}
\big|\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle\big| &= \frac{1}{M}\big|\langle \mathbf{z} + R_N\mathbf{z} + \ldots + +R_N^{M-1}\mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle\big| \\
&\leq \frac{1}{M}\big|\mathbf{z} + R_N\mathbf{z} + \ldots + +R_N^{M-1}\mathbf{z}\big|\big|\mathbf{w}\big| \\
&< \frac{1}{M}\sqrt{2M}|\mathbf{w}| \\
&< \sqrt{\frac{2}{M}} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

para todo $N > N_0$, como queriamos mostrar. □

4.2 Campos de Vetores em G/H

Nesta seção veremos um caso especial de campo de vetores em G/H que é unicamente ergódico.

Proposição 4.2. *Sejam X um campo em G/H e $\varphi : \mathbb{R} \times G/H \to G/H$ o fluxo gerado por X. Suponhamos que X é constante nas coordenadas usuais, i.e.,*

$$X(y_1, y_2, y_3) = v_1\frac{\partial}{\partial y_1} + v_2\Big(\frac{\partial}{\partial y_2} + y_1\frac{\partial}{\partial y_3}\Big) + v_3\frac{\partial}{\partial y_3}$$

para todo $(y_1, y_2, y_3) \in G$, e tal que $v_2/v_1 \notin \mathbb{Q}$, i.e., cada órbita de φ_t é densa. Então o campo X é unicamente ergódico.

Demonstração: Consideremos o espaço de medida $(G/H, \mathcal{A}, m)$ onde $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos borelianos de G/H e m a medida de Lebesgue. É fácil ver que m é X-invariante. Então para provar que X é unicamente ergódico basta mostrar que para todo $x \in G/H$ e $A \in \mathcal{A}$, o tempo de estadia médio de x em A, $\tau(x, A)$, existe e é igual a $m(A)$, isto é,

$$\tau(x, A) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\lambda\{t : 0 \leq t \leq T, \varphi_t(x) \in A\}.$$

onde λ denota a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Para isso, tomamos $x_0 \in G/H$, $\epsilon > 0$ e definimos

$$A_\epsilon = \{\varphi(s, x) : s \in (0, \epsilon), x \in D(x_0)\}$$

onde $D(x_0)$ é um pequeno disco 2-dimensional de centro x_0 e paralelo a $\{0\} \times \mathbb{R}^2$. Podemos supor que $v_1 = 1$. Então para todo $x \in G/H$ temos que

$$\begin{aligned}\tau(x, A_\epsilon) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \lambda\{t : 0 \leq t \leq T, \varphi_t(x) \in A_\epsilon\} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{\epsilon}{T} card\{s : 0 \leq s \leq T, \varphi_1^s(\tilde{x}) \in A_\epsilon\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $card\, B$ denota o número de elementos do conjunto B e $\tilde{x} = \varphi_{t_0}(x) \in A_\epsilon$. Observemos que tal t_0 existe pois as órbitas de φ_t são densas. Observemos também que $\tilde{x} \in \{y_0\} \times [0,1]^2$ para algum $y_0 \in [0,1]$. Ora, como $\{y_0\} \times [0,1]^2 = T^2$, podemos restringir φ e considerar $\psi : T^2 \to T^2$ como sendo esta restrição. Com esta consideração é claro que

$$\psi(z, w) = (\alpha z, \beta z w)$$

para alguns $\beta, \alpha \in S^1$ com $\alpha = e^{2\pi c}$, $c = v_2 \notin \mathbb{Q}$. Logo, pela proposição 4.1 resulta que ψ é unicamente ergódica pois ψ e ϕ são conjugadas. Portanto, segue de (4.2) que

$$\begin{aligned}\tau(x, A_\epsilon) &= \epsilon \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} card\{s : 0 \leq s \leq T, \psi^s(\tilde{x}) \in T^2\} \\ &= \epsilon\, \mu(D(x_0)) \\ &= m(A_\epsilon).\end{aligned}$$

onde μ é a medida de Lebesgue de T^2. O resultado segue agora do fato que as uniões de conjuntos da forma A_ϵ geram $\mathcal{A}$. $\square$

Capítulo 5

Estabilidade

Neste capítulo demonstraremos os teoremas sobre L e T-estabilidade. Começaremos apresentando algumas noções e resultados auxiliares que nos serviram para definir a subálgebra $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$ das direções quase horizontais. Provaremos na proposição 5.4 que a aplicação natural $\mathcal{E} \to G/H$ pode ser levantada para obter uma função $\mathcal{E} \to G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ tal que o fecho da imagem seja uma variedade topologica 3-dimensional homeomorfa a G/H (no caso em que $\mathcal{E}$ seja irracional) ou uma variedade diferenciavel 2-dimensional difeomorfa a $\mathcal{E}/H$ (no caso em que $\mathcal{E}$ seja racional). Na seção 5.2 definiremos a nossa ferramenta principal, a transformação linear $\tau_a : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$, e daremos uma interpretação geometrica para ela. Na seção 5.3 provaremos no lema 5.13 que a imagem de τ_a tem dimensão 1 e é constante em órbitas. Finalmente provaremos os Teoremas 3 e 4.

No que segue θ denota uma ação homogênea horizontal de G em $G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$.

5.1 A subálgebra $\mathcal{E}$ das direções quase horizontais

Começaremos por dar a noção precisa de uma ação $\widetilde{\theta}$ estar suficientemente próxima de θ. É interessante dar os conceitos relacionados a folheações. Seja $\mathcal{F}_0$ a folheação de codimensão um de $M = G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ definida pela projeção sobre a segunda coordenada, assim $\mathcal{F}_0$ é a folheação correspondente para θ. A C^r-métrica para folheações quer dizer a C^r-métrica para os campos de planos.

Definição 5.1. *Uma folheação $\mathcal{F}_1$ de M é chamada aceitável se as folhas são sempre transversais as retas verticais; uma ação é dita aceitável se a correspondente folheação é aceitável.*

É claro que qualquer $\mathcal{F}_1$ (respectivamente $\widetilde{\theta}$) suficientemente C^0-próxima de $\mathcal{F}_0$ (respectivamente θ) é aceitável. Dado $([g], z) \in G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ consideremos $T_{([g],z)}G/H \times (-\epsilon, \epsilon) = T_{[g]}G/H \times \mathbb{R}$. Uma perturbação aceitável $\widetilde{\theta}$ de θ naturalmente define em cada ponto $([g], z) \in M$ uma bijeção linear $\tilde{\tau}_{([g],z)} : T_{[g]}G/H \to \mathcal{G}$, a inversa da projeção de $\widetilde{\theta}$ sobre $T_{[g]}G/H$. Além disso, dado um caminho $\gamma : [a, b] \to G$ e um ponto $([\gamma(a)], z_a) \in M$ existe, para δ suficientemente pequeno, um único caminho $\widetilde{\gamma} : [a, a + \delta) \to M$ com $\widetilde{\gamma}(a) = ([\gamma(a)], z_a)$ cuja imagem está contida numa órbita de $\widetilde{\theta}$. Neste caso dizemos que $\widetilde{\gamma}$ é o levantamento de γ; em outras palavras, a imagem de $\widetilde{\gamma}$ deve ficar dentro da mesma folha da folheação. A razão pela qual não podemos definir γ para todo $[a, b]$ é que pode cair fora de M se $|z|$ é muito grande.

Definição 5.2. *Dizemos que uma folheação aceitável $\mathcal{F}_1$ é boa se para todo γ de comprimento menor que 36 e $|z_a| < \epsilon/2$, γ pode ser levantado em todo seu dominio e a curva resultante está totalmente contida na região $|z| < \epsilon$. Uma ação aceitável $\widetilde{\theta}$ é boa se a correspondente folheação é boa.*

Novamente, é claro que qualquer $\mathcal{F}_1$ (resp., $\widetilde{\theta}$) a qual está suficientemente C^0-próxima de $\mathcal{F}_0$ (resp., θ) é boa.

Consideremos $\mathcal{F}_1$ uma boa perturbação de $\mathcal{F}_0$ tal que a folha que passa pelo ponto $p_0 = ([g_0], z_0) \in M$, $|z_0| < \epsilon/2$, é não compacta. Podemos definir funções suaves e estritamente crescentes

$$f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-, f_3^+, f_3^- : (-\epsilon/2, \epsilon/2) \to (-\epsilon, \epsilon)$$

da seguinte forma: consideremos os caminhos $\gamma_1^s, \gamma_2^s, \gamma_3^s : [0, 1] \to G$ onde

$$\gamma_1^s(t) = g_0 \cdot (st, 0, 0), \gamma_2^s(t) = g_0 \cdot (0, st, 0), \gamma_3^s(t) = g_0 \cdot (0, 0, st)$$

$s = \pm 1$. Note que γ_3^s independe do representante g_0 no sentido que se $p_0 = ([g_0], z_0) = ([\tilde{g}_0], z_0)$ então $[\widetilde{\gamma}_3^s(t)] = [\gamma_3^s(t)]$ onde $\widetilde{\gamma}_3^s(t) = \tilde{g}_0 \cdot (0, 0, st)$. O mesmo não acontece com γ_1^s e γ_2^s. Para eles temos que $[\widetilde{\gamma}_i^s(t)] = [\gamma_i^s(t) \cdot \gamma_3^s(t)^{n_i}]$ para algum $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$ e onde $\widetilde{\gamma}_1^s(t) = \widetilde{g}_0 \cdot (st, 0, 0), \widetilde{\gamma}_2^s(t) = \widetilde{g}_0 \cdot (0, st, 0)$. Os caminhos $\gamma_1^s, \gamma_2^s, \gamma_3^s$ podem ser levantados em $G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ a partir do ponto $([g_0], z)$; chamaremos os pontos finais de tais levantamentos de

$$([g_0], f_1^s(z)), ([g_0], f_2^s(z)), ([g_0], f_3^s(z))$$

respectivamente. Como $\mathcal{F}_1$ é uma folheação, é claro que as $f_i^{\prime}$s são funções suaves e estritamente crescentes. Note que f_3^s independe do representante

g_0, não entanto, as funções f_1^s, f_2^s "quase" independem de g_0 no sentido que se $p_0 = ([g_0], z_0) = ([\tilde{g}_0], z_0)$ então o levantamento, $\widetilde{f_i^s}$, do caminho $\widetilde{\gamma}_i^s$ (definido acima) satisfaz a seguinte relação

$$\widetilde{f_i^s} = f_i^s \circ (f_3^s)^{n_i} \tag{5.1}$$

para algum $n_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$. Além disso, é fácil ver que f_1^-, f_2^-, f_3^- são as funções inversas de f_1^+, f_2^+, f_3^+ respectivamente e que satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} f_3^- \circ f_1^- \circ f_3^+ \circ f_1^+ &= id \\ f_3^- \circ f_2^- \circ f_3^+ \circ f_2^+ &= id \\ f_2^- \circ f_1^- \circ f_2^+ \circ f_1^+ &= f_3^+ \end{aligned}$$

Queremos, para f_1^+, f_2^+ e f_3^+, usar os lemas do capítulo 3. Para isso, definiremos um subconjunto adequado de folheações boas.

Definição 5.3. *Seja $\mathcal{F}_1$ uma boa folheação. Dizemos que $\mathcal{F}_1$ é excelente se para todo $p_0 = ([g_0], z_0) \in M$ com $|z_0| < \epsilon/2$ as funções f_1^+, f_2^+ associadas a p_0 satisfazem o seguinte:*

- $\|f_1^+ - id\|_{C^1}, \|f_2^+ - id\|_{C^1} < \epsilon/10^3$.

Uma ação boa $\widetilde{\theta}$ é excelente se a correspondente folheação é excelente.

É claro que qualquer $\mathcal{F}_1$ (resp., $\widetilde{\theta}$) a qual está suficientemente C^1-próxima de $\mathcal{F}_0$ (resp., θ) é excelente.

Estamos interessados em perturbar uma folheação compacta para obter uma folheação excelente e não compacta.

Seja $\mathcal{F}_1$ uma excelente perturbação de $\mathcal{F}_0$ tal que a folha que passa pelo ponto $p_0 = ([g_0], z_0) \in M$, $|z_0| < \epsilon/2$, é não compacta. Então as aplicações f_1^+, f_2^+ e f_3^+ definidas acima satisfazem os lemas do capítulo 3. Seja $L_{(f_1^+, f_2^+)}$ a reta da direção quase horizontal relativa a f_1^+ e f_2^+. Note que a reta $L_{(f_1^+, f_2^+)}$ independe do representante g_0. Isto decorre da relação (5.1) e do fato que f_3^+ possui muitos pontos fixos. Escolhamos agora um vetor não nulo $(v_1, v_2) \in L_{(f_1^+, f_2^+)}$ e definamos em $\mathcal{G}$ o subespaço vetorial

$$\mathcal{E} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

É imediato ver que é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{G}$ de codimensão um. Além disso, é claro que $\mathcal{E}$ não depende da escolha do vetor $(v_1, v_2) \in L_{(f_1^+, f_2^+)}$. Frequentemente usaremos a expressão *subálgebra das direções quase horinzontais* para designar à subálgebra definida acima. Vejamos que propriedades tem.

Proposição 5.4. *Seja $\mathcal{F}_1$ uma excelente perturbação de $\mathcal{F}_0$ tal que a folha F que passa pelo ponto $p_0 = ([(y_1, y_2, y_3)], z_0) \in M$ é não compacta e seja $\mathcal{E}$ a subálgebra das direções quase horizontais de $\mathcal{F}_1$ em p_0. Considere a aplicação natural*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{G} &\rightarrow G/H \\ B &\mapsto [exp(B) \cdot (y_1, y_2, y_3)] \end{aligned}$$

A subálgebra $\mathcal{E}$ não muda quando sustituimos p_0 por outro ponto da mesma folha. Além disso, a restrição da aplicação natural Φ a $\mathcal{E}$ pode ser levantada para uma função $\Psi : \mathcal{E} \rightarrow G/H \times (-\epsilon, \epsilon)$ de forma que $\Psi(0) = p_0$ e

(i) *se $\mathcal{E}$ é irracional (i.e., não admite uma equação com coeficientes racionais) então o fecho da imagem de Ψ é uma variedade topológica M_1, 3-dimensional e sua projeção sobre G/H é um homeomorfismo. Além disso, M_1 está contida em folhas não compactas.*

(ii) *se $\mathcal{E}$ é racional então o supremo e o ínfimo da interseção da imagem de Ψ com cada reta vertical forma duas variedades diferenciáveis 2-dimensionais, M_2^+ e M_2^- (possivelmente idênticas) contidas em folhas não compactas e tal que suas projeções sobre $exp(\mathcal{E})/H \subset G/H$ são difeomorfismos.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p_0 = ([I], 0)$. Usaremos as notações do capítulo 3 para f_1^+, f_2^+ e f_3^+. Sejam $p_1 = ([g_1], z_1)$ um ponto de F e $\gamma : [0, 1] \rightarrow G/H$ um caminho contínuo com $\gamma(0) = [g_1]$ e $\gamma(1) = [I]$. Para z próximo de z_1 podemos levantar γ a partir do ponto $([g_1], z)$. Seja $([I], g_\gamma(z)$ o ponto final do levantamento. Então

$$\hat{f}_i^+(z) = g_{\gamma^{-1}} \circ f_i^+ \circ g_\gamma(z), \qquad i = 1, 2, 3,$$

onde $\hat{f}_i^+$ é o correspondente f_i^+ para o ponto p_1. Ora, como $g_{\gamma^{-1}} = (g_\gamma)^{-1}$, segue da definição da reta da direção quase horizontal que $L_{(f_1^+, f_2^+)} = L_{(\hat{f}_1^+, \hat{f}_2^+)}$. Logo a subálgebra $\mathcal{E}$ é constante na folha F. Provaremos agora a afirmação sobre o levantamento da restrição de Φ a $\mathcal{E}$. Pela proposição 3.4, dados $n, m \in \mathbb{Z}$ com $d\big((n, m), L_{(f_1^+, f_2^+)}\big) < 2$ existe $\varphi_{(n,m)} \in \mathcal{F}(n, m)$ tal que $\varphi_{(n,m)}(-\epsilon/8, \epsilon/8) \subset (-\epsilon/4, \epsilon/4)$. Sabemos que f_3^+ tem pontos fixos nos intervalos $(-\epsilon/2, -\epsilon/4)$ e $(\epsilon/4, \epsilon/2)$. Daí

$$(f_3^+)^k \circ \varphi_{(n,m)}(0) = \varphi_{(n,m)} \circ (f_3^+)^k(0) \in (-\epsilon/2, \epsilon/2)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Isto implica que o subconjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 \\ y_3 & y_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G} : d\big((\lfloor y_1 \rfloor + i, \lfloor y_2 \rfloor + j), L_{(f_1^+, f_2^+)}\big) < 2, i, j = 0, 1 \right\}$$

(onde $\lfloor y \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual que y) pode ser levantado e o levantamento está contido no subconjunto aberto $N = G/H \times (-\epsilon/2, \epsilon/2)$. Já que $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, o levantamento de $\mathcal{E}$ está contido em N.
Seja agora $\alpha = v_2/v_1$, o número de rotação relativo de (f_1^+, f_2^+). Vamos mostrar que se α é irracional então temos (i) do lema. De outro lado, se α é racional temos (ii).

Caso 1: Suponhamos α irracional. Pela proposição 3.5 deve-se ter $f_3^+ = id$ numa vizinhança da origem o qual implica que f_1^+ e f_2^+ comutam. Como a órbita de $\widetilde{\theta}$ que passa por $([I], 0)$ não é compacta podemos supor que $f_2^-(0) < 0 < f_2^+(0)$ e $f_2^-(0) \leq f_1^-(0) \leq 0 \leq f_1^+(0) \leq f_2^+(0)$.
Agora podemos construir uma copia de S^1, tomamos o intervalo $(f_2^-(0), f_2^+(0))$ e identificamos z com $f_2^+(z)$. Logo f_1^+, f_2^+, f_3^+ induzem naturalmente funções $g_1^+, g_2^+, g_3^+ : S^1 \to S^1$ definidas por $g_i([z]) = [f_i^+(z)]$. Seja h_i o número de rotação de g_i com $0 \leq h_i \leq 1, h_i = 0$ se e somente se $f_i^+(z) = z$ para algum z e $h_i = 1$ se e somente se $f_i^+(z) = f_2^+(z)$ para algum z. Então temos que $h_2 = 1$ e $h_3 = 0$. Pela forma como foi definido o subespaço $\mathcal{E}$ é claro que é ortogonal ao vetor (h_1, h_2, h_3), ou seja, $h_1 = -\alpha$. Ora, consideremos o levantamento de $\mathcal{E}$ a N e logo a projeção sobre G/H. Como h_1 é irracional, esta projeção é densa em G/H. Pelo Teorema de Denjoy, existe uma conjugação contínua entre g_1 e a correspondente rotação irracional (não necessariamente suave ou ainda C^1). Levantando esta conjugação obtemos um homeomorfismo crescente $\phi : (f_2^-(0), f_2^+(0)) \to (-1, 1)$ com $\phi(f_2^+(z)) = \phi(z) + 1$. Já que todas as f_i's comutam temos que $\phi(f_i^+(z)) = \phi(z) + h_i$. Claramente ϕ pode-se estender naturalmente a $\big((f_2^-)^9(0), (f_2^+)^9(0)\big)$. Ora, com ajuda de ϕ vamos definir uma variedade 3-dimensional $M_1 \subset N$ a qual é homeomorfa a G/H (via a projeção). Primeiro definamos $\Lambda : N \to \mathbb{R}$ uma função contínua e estritamente crescente sobre retas verticais da seguinte maneira: consideremos $p = (y_1, y_2, y_3, z) \in N, 0 \leq y_i < 1$ e seja $\gamma : [0, 1] \to G$ a reta que liga o ponto (y_1, y_2, y_3) a $(0, 0, 0)$, levantemos γ a partir de p, o caminho resultante termina num ponto da forma $(0, 0, 0, z')$: definamos $\Lambda(p) = \phi(z') - h_1 y_1 - y_2$.

A continuidade de Λ segue das identidades $\phi(f_i^+(z)) = \phi(z) + h_i$. Seja $M_1 = \Lambda^{-1}(0)$ então M_1 é o fecho do levantamento de $\mathcal{E}$ a N.

Caso 2: Suponhamos α racional. Consideremos o levantamento de $\mathcal{E}$ a M e logo a projeção sobre G/H. Como α é um número racional esta projeção é um 2-toro contido em G/H. Definamos duas variedades 2-dimensionais M_2^+ e M_2^- da seguinte forma: para cada (y_1, y_2, y_3) na projeção para G/H do levantamento de $\mathcal{E}$ a M considere o conjunto do correspondente z no levantamento e denotemos por z^+ e z^- o supremo e o ínfimo deste conjunto, respectivamente. Sejam

$$\begin{aligned} M_2^+ &= \{(y_1, y_2, y_3, z^+) \in exp(\mathcal{E})/H \times (-\epsilon, \epsilon)\}, \\ M_2^- &= \{(y_1, y_2, y_3, z^-) \in exp(\mathcal{E})/H \times (-\epsilon, \epsilon)\} \end{aligned}$$

É claro que as projeções de M_2^+ e M_2^- sobre $exp(\mathcal{E})/H \subset G/H$ são difeomorfismos. Isto termina a prova da proposição. $\square$

5.2 A transformação linear τ_a

Estamos prontos para dar a definição de uma de nossas ferramentas principais. A variedade M_1 recebe naturalmente uma medida unitária μ a qual é o levantamento da medida de Lebesgue m de G/H via a projeção. No caso 2, a medida de Lebesgue na projeção vertical de M_2^+ pode ser multiplicada por uma constante e levantada pela projeção para obter medidas unitárias μ^+ e μ^- em M_2^+ e M_2^-. Quando integremos sobre estas variedades consideraremos estas medidas. Seja

$$\pi_{\mathcal{G}} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 \\ v_3 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G} \mapsto (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

Definição 5.5. *Seja $\tau_a : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\tau_a(v) = \int_{M_0} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(v))dp$$

onde M_0 denota a variedade M_1 ou M_2^+ segundo seja o caso.

Para mostrar que τ_a comporta-se bem precisamos de uma interpretacão mais geometrica para ela. Vamos introduzir uma função auxiliar ξ. No caso 1, o levantamento de $\mathcal{E}$ (o qual está contido em M_1) está contido numa órbita e portanto pode ser levado atras a G. Em outras palavras, isto define uma aplicação contínua $\xi : \mathcal{E} \to G$ cuja imagem é a preimagem de M_1 pela ação $\widetilde{\theta}$. No caso 2, consideramos o levantamento de $\mathcal{E}$ a partir do ponto $([I], z^+) \in M_2^+$ e fazemos o mesmo que acima para definir ξ. Consideremos a aplicação

$$\pi_G : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y_1 & 1 & 0 \\ y_3 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \in G \mapsto \ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

O próximo lema relaciona τ_a e ξ.

Lema 5.6. *Suponhamos que $\widetilde{\theta}$ é uma boa perturbação. Então*

$$\tau_a(v) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \pi_G(\xi(tv)) \tag{5.2}$$

Demonstração: Observemos primero que, como $\widetilde{\theta}$ é uma excelente perturbação, segue-se da demonstração da proposição 5.4 que ξ pode ser estendida a uma vizinhança de $\mathcal{E}$ de raio 1. Ainda mais, temos que o levantamento de essa vizinhança está contido num compacto, o qual implica que $\pi_G \circ \xi$ é uniformemente contínua sobre este domínio maior.

Caso 1: Seja $v \in \mathcal{E}$. Temos que $\pi_G(\xi(tv)) = \int_0^t \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_{p(s)}(v))ds$ onde $p(s)$ é obtido levantando sv à variedade M_1. Suponhamos que o conjunto $\{\Phi(tv); t \in \mathbb{R}\}$ é denso em G/H. Como foi provado no capítulo 4, o campo de vetores em G/H dado por $X(y_1, y_2, y_3) = v$ é unicamente ergódico (ou seja existe uma única medida unitária μ em G/H tal que $\mu(A) = \mu(\varphi_t(A))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ onde φ_t é o fluxo associado a X) sendo a medida de Lebesgue em G/H a única medida invariante. Então se definimos $f : G/H \to \mathbb{R}^2$ por $f(y_1, y_2, y_3) = \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_{\pi_y^{-1}(y_1,y_2,y_3)}(v))$ onde π_y^{-1} é a inversa da projeção de M_1 em G/H , o teorema de Birkhoff nos garante que o limite abaixo existe e nos permite calcular seu valor

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\pi_G(\xi(tv)) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_{p(s)}(v))ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\Phi(sv))ds \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f \circ \varphi_s(0)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{G/H} f\, dm \\
&= \int_{M_1} f \circ \pi_y dm \\
&= \int_{M_1} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(v)) d\mu(p) \\
&= \tau_a(v)
\end{aligned}
$$

No caso que $\{\Phi(tv); t \in \mathbb{R}\}$ não seja denso em G/H, um argumento similar mostra que $\lim_{t\to\infty}(1/t)\pi_G(\xi(tv)) = \int_{N(v)} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(v)) d\mu_v(p)$ onde $N(v)$ é o toro definido pelo fecho de $\{\Phi(tv); t \in \mathbb{R}\}$ em G/H e μ_v é sua medida unitaria. Ora, como G/H pode-se decompor em toros paralelos a $N(v)$, isto é, dado $w \in \mathcal{G}$ temos que o fecho de $\{\Phi(tv+w); t \in \mathbb{R}\}$ é um toro paralelo a $N(v)$ (o qual denotaremos por $N(w)$) resulta que

$$
\begin{aligned}
\int_{M_1} \tilde{\tau}_p(v) d\mu(p) &= \int \int_{N(w)} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(v)) d\mu_w(p) \\
&= \int \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \pi_G(\xi(tv+w)) dw
\end{aligned}
$$

logo se mostrarmos que para todo $w \in \mathcal{G}$

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \pi_G(\xi(tv)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \pi_G(\xi(tv+w)) \tag{5.3}
$$

teremos provado (5.2)). Vejamos que (5.3) segue da continuidade uniforme de ξ. De fato, como a distância entre $tv+w$ e tv é constante, existe $k > 0$ que não depende de de t tal que $|\pi_G(\xi(tv+w)) - \pi_G(\xi(tv))| \leq k$ logo $|(1/t)\pi_G(\xi(tv+w)) - (1/t)\pi_G(\xi(tv))| \leq k/t$ fazendo $t \to \infty$ temos que $k/t \to 0$ a qual prova (5.3).

Caso 2: Seja $v \in \mathcal{E}$. Temos que $\pi_G(\xi(tv)) = \int_0^t \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_{p(s)}(v)) ds$ onde $p(s)$ é obtido levantando sv à variedade M_2^+.Procederemos como acima. Suponhamos que $\{tv; t \in \mathbb{R}\}$ é denso em $\Phi(\mathcal{E})$. Consideremos o campo de vetores em $\Phi(\mathcal{E})$ dado por v. Como $\Phi(\mathcal{E})$ é um toro este campo é unicamente ergódico (ver [4]), sendo a medida de Lebesgue a única medida invariante em $\Phi(\mathcal{E})$. Pelo teorema de Birkhoff, o limite em (5.2) existe e é igual a $\tau_a(v)$. Quando $\{\Phi(tv); t \in \mathbb{R}\}$ não é denso em G/H a prova é análoga ao caso 1. $\square$

Observação: Já que as aplicações τ_a e ξ dependem do ponto p_0 escolhido na órbita F será conveniente a partir de agora denotar ditas aplicações de $\tau_a^{p_0}$ e ξ_{p_0}. Quando não houver possibilidade de confusão escreveremos simplesmente τ_a e ξ.

5.3 Holonomia

Seja $\widetilde{\theta}$ uma excelente perturbação de θ e F uma de suas órbitas. Seja $\gamma : [0,1] \to F$ um caminho contínuo e $p_0 = \gamma(0)$. Pelo teorema de levantamento de caminhos, existe uma única curva contínua $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to G$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = I$ e $\widetilde{\theta}(\widetilde{\gamma}(t), p_0) = \gamma(t)$, $\forall t \in [0,1]$. Definamos $\varphi_\gamma = \widetilde{\gamma}(1)$. Como o grupo de isotropia de p_0 é um subgrupo discreto de G, no caso que $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$ resulta que $\varphi_\gamma = \varphi_\alpha$ para todo α caminho homotópico ao caminho γ em F. Isto nos permite definir um homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \Xi_{p_0} : \pi_1(F, p_0) & \to & G \\ {[\gamma]} & \mapsto & \varphi_{\gamma^{-1}} \end{array}$$

do grupo fundamental de F em p_0 no grupo G.
Dados $p_0, p_1 \in F$, qualquer caminho $\alpha : [0,1] \to F$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$ induz um isomorfismo

$$\alpha^* : \Xi_{p_0}(\pi_1(F, p_0)) \to \Xi_{p_1}(\pi_1(F, p_1))$$

pondo $\alpha^*(\Xi_{p_0}[\mu]) = \varphi_\alpha \cdot \Xi_{p_0}[\mu] \cdot \varphi_{\alpha^{-1}}$.
Consideremos $\gamma_3^+ : [0,1] \to G$ o caminho definido como na seção 5.1. Podemos levantar γ_3^+ a partir do ponto p_0. Indiquemos por $\widetilde{\gamma}_3^{p_0} : [0,1] \to F$ o levantamento. Observe que se $\widetilde{\gamma}_3^{p_0}$ é um caminho fechado então para todo $p_1 \in F$, o caminho $\widetilde{\gamma}_3^{p_1} : [0,1] \to F$ que é o levantamento de γ_3^+ a partir do ponto p_1 é também fechado. As órbitas de $\widetilde{\theta}$ satisfazendo esta propriedade serão denominadas de *órbitas regulares*. É importante observar que próxima de qualquer órbita de $\widetilde{\theta}$ existe uma órbita regular. Isto segue do fato que $\widetilde{\gamma}_3^{p_0}(1) = f_3^+(z_0)$ e lembrando que f_3^+ tem pontos fixos perto de z_0.
Suponhamos que F é uma órbita regular. Seja $\alpha : [0,1] \to F$ é um caminho que liga p_0 a p_1, como $\alpha^{-1}\widetilde{\gamma}_3^{p_0}\alpha$ é um caminho homotópico a $\widetilde{\gamma}_3^{p_1}$ em F, resulta que

$$\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}] = \varphi_\alpha \cdot \Xi_{p_0}[\widetilde{\gamma}_3^{p_0}] \cdot \varphi_{\alpha^{-1}}$$

e portanto

$$\pi_G(\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}]) = \pi_G(\Xi_{p_0}[\widetilde{\gamma}_3^{p_0}]).$$

Temos provado então o seguinte:

Proposição 5.7. *Sejam $\widetilde{\theta}$ uma excelente perturbação de θ e F uma de suas órbitas regulares. Então a projeção em $\mathbb{R}^2$ do elemento de G correspondente ao levantamento de γ_3^+ via a aplicação Ξ é constante em órbitas.*

Vejamos um caso especial.

Corolario 5.8. *Com as condições acima, suponhamos que $\widetilde{\theta}$ coincide com θ fora de uma vizinhança de F. Neste caso a projeção em $\mathbb{R}^2$ do elemento de G correspondente ao levantamento de γ_3^+ via a aplicação Ξ é 0.*

Demonstração: Suponhamos que F é uma órbita compacta. Então os levantamentos dos caminhos γ_1^+, γ_2^+, definidos na seção 5.1, a partir de um ponto $p_1 \in F$ são fechados. Sejam $\widetilde{\gamma}_1^{p_1}, \widetilde{\gamma}_2^{p_1}$ tais levantamentos. Como γ_3^+ é homotópico ao caminho $[\gamma_1^+, \gamma_2^+] = \gamma_1^+\gamma_2^+\gamma_1^-\gamma_2^-$, temos que $\widetilde{\gamma}_3^{p_1}$ é homotópico a $[\widetilde{\gamma}_1^{p_1}, \widetilde{\gamma}_2^{p_1}]$ em F. Isto implica que $\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}] = \Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_1^{p_1}, \widetilde{\gamma}_2^{p_1}]$, ou seja, $\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}] \in [G, G]$. Logo $\Pi_G(\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}]) = 0$.
Suponhamos que F é uma órbita não compacta. Como $\widetilde{\theta}$ coincide com θ fora de uma vizinhança de F, existem duas órbitas compactas

$$F^+ = \{(y_1, y_2, y_3, z^+) \in M : z^+ = sup\{z; (y_1, y_2, y_3, z) \in F\}\}$$

$$F^- = \{(y_1, y_2, y_3, z^-) \in M : z^- = inf\{z; (y_1, y_2, y_3, z) \in F\}\}$$

Então, dado $p_1 = (y_1, y_2, y_3, z_1) \in F$ existe uma sequencia $p_k = (y_1, y_2, y_3, z_k)$ em F tal que $z_k \to z^+$ e $p^+ = (y_1, y_2, y_3, z^+) \in F^+$. Se $\widetilde{\gamma}_3^{p_1}$ é um caminho fechado podemos calcular $\Xi_{p_k}[\widetilde{\gamma}_3^{p_k}]$, para todo k. Então, por continuidade da ação, segue que $\Xi_{p_k}[\widetilde{\gamma}_3^{p_k}] \to \Xi_{p_+}[\widetilde{\gamma}_3^{p^+}]$. Como vimos na proposição acima $\pi_G(\Xi_{p_k}[\widetilde{\gamma}_3^{p_k}]) = \pi_G(\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}])$, para todo k. Logo $\pi_G(\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}]) = \pi_G(\Xi_{p_+}[\widetilde{\gamma}_3^{p_+}])$. Mas $\pi_G(\Xi_{p_+}[\widetilde{\gamma}_3^{p_+}]) = 0$ pois F^+ é uma órbita compacta. Portanto $\pi_G(\Xi_{p_1}[\widetilde{\gamma}_3^{p_1}]) = 0$ o qual queriamos mostrar. $\square$

Voltemos a considerar a transformação linear τ_a. Podemos agora obter mais informações sobre ela as quais serão coleccionadas nos resultados abaixo. No que se segue usaremos as notações dadas nas seções 5.1 e 5.2. Um primer fato sobre o comportamento de τ_a é dado pelo seu valor no vetor E_3.

Corolario 5.9. *Seja $\widetilde{\theta}$ uma excelente perturbação de θ tal que a órbita regular F que passa pelo ponto p_0 é não compacta. Então $\tau_a(E_3)$ é constante na órbita F e satisfaz*

$$\tau_a(E_3) = \pi_G(\Xi_{p_0}[\widetilde{\gamma}_3^{p_0}]).$$

Demonstração: Observe-se que, como $\Phi(\mathcal{E})$ pode-se decompor em circulos paralelos a $N_0 = \{\gamma_3(t); t \in \mathbb{R}\}$ então M_0 pode-se decompor em circulos, denotados por N_s, que são dados pelos levantamentos de caminhos paralelos ao caminho γ_3. Logo

$$\tau_a^{p_0}(E_3) = \int \int_{N_s} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(E_3))dpds$$

Mas

$$\int_{N_s} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(E_3))dp = \pi_G(\Xi_{p_s}[\widetilde{\gamma}_3^{p_s}]).$$

Decorre daí e da proposição 5.7 que

$$\tau_a^{p_0}(E_3) = \pi_G(\Xi_{p_0}[\widetilde{\gamma}_3^{p_0}]).$$

Sendo p_0 um ponto arbitrario de F temos provado então que

$$\tau_a^{p}(E_3) = \pi_G(\Xi_{p}[\widetilde{\gamma}_3^{p}]),$$

para todo $p \in F$. Novamente, usando a proposição 5.7 resulta que

$$\tau_a^{p}(E_3) = \tau_a^{p_0}(E_3)$$

para todo $p \in F$. Portanto $\tau_a(E_3)$ é constante em F. □

Usando os corolarios 5.8 e 5.9 obtemos facilmente que:

Corolario 5.10. *Com as condições acima, suponhamos que $\widetilde{\theta}$ coincide com θ fora de uma vizinhança de F. Então $\tau_a(E_3) = 0$*

Proposição 5.11. *Sejam $\widetilde{\theta}$ uma excelente perturbação de θ e F uma de suas órbitas regulares não compactas. Dados $p_0, p_1 \in F$ tais que*

$$p_0 = ([g_0], z_0), p_1 = ([g_0], z_1).$$

Então, para todo $v \in \mathcal{E}$, $\tau_a^{p_0}(v) - \tau_a^{p_1}(v)$ é um multiplo de $\tau_a(E_3)$.

Demonstração: Seja $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to F$ um caminho contínuo que liga p_0 a p_1. Existe $\gamma : [0,1] \to G$ caminho contínuo com $\gamma(0) = g_0$ tal que o levantamento de γ a partir do ponto p_0 seja $\widetilde{\gamma}$. Ora, dado $v \in \mathcal{E}$ existe $\tilde{v} \in \mathcal{E}$ com $v = (\gamma(1))^{-1}\tilde{v}\gamma(1)$. Então

$$\begin{aligned}\tau_a^{p_1}(v) &= \tau_a^{p_1}((\gamma(1))^{-1}\tilde{v}\gamma(1)) \\ &= \tau_a^{p_1}(\tilde{v} + \lambda E_3) \\ &= \tau_a^{p_1}(\tilde{v}) + \lambda\tau_a^{p_1}(E_3)\end{aligned}$$

Logo se mostrarmos que $\tau_a^{p_1}(\tilde{v}) = \tau_a^{p_0}(v)$ teremos provado a proposição. Com efeito, como $v = (\gamma(1))^{-1}\tilde{v}\gamma(1)$ temos

$$exp(t\tilde{v})\gamma(1) = \gamma(1)exp(tv),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$\xi_{p_1}(t\tilde{v}) \cdot \xi_{p_0}(\gamma(1)) = \xi_{\Psi(tv)}(\gamma(1)) \cdot \xi_{p_0}(tv)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\pi_G(\xi_{p_1}(t\tilde{v})) + \pi_G(\xi_{p_0}(\gamma(1))) = \pi_G(\xi_{\Psi(tv)}(\gamma(1))) + \pi_G(\xi_{p_0}(tv)).$$

Multiplicando por $(1/t)$ e fazendo $t \to \infty$ temos que $\pi_G(\xi_{p_0}(\gamma(1)))/t \to 0$ e como $\{\Psi(tv); t \in \mathbb{R}\}$ está contido na variedade compacta M_0 segue que o termo $\pi_G(\xi_{\Psi(tv)}(\gamma(1)))$ é limitado e assim $\pi_G(\xi_{\Psi(tv)}(\gamma(1)))/t \to 0$. Portanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\pi_G(\xi_{p_1}(t\tilde{v})) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\pi_G(\xi_{p_0}(tv)).$$

Daí, por (5.2) temos a igualdade desejada. □

Corolario 5.12. *Com as condições acima, suponhamos que $\widetilde{\theta}$ coincide com θ fora de uma vizinhança de F. Então*

$$\tau_a^{p_0}(v) = \tau_a^{p_1}(v)$$

para todo $v \in \mathcal{E}$.

Demonstração: É consequencia imediata da proposição acima e do corolario 5.10. □

O lema abaixo mostra que a imagem de τ_a é constante em fibras de F.

Lema 5.13. *Sejam $\widetilde{\theta}$ uma excelente perturbação de θ e F uma de suas órbitas regulares não compactas. Então a imagem de τ_a tem dimensão 1 e é constante nos conjuntos $\{[g_0]\} \times (-\epsilon, \epsilon) \cap F$, $g_0 \in G$.*

Demonstração: Pela proposição 5.11 é suficiente mostrar que $\dim(\tau_a^p(\mathcal{E})) = 1$ para todo $p \in F$. Para isso, consideremos $p_0 \in F$ e $v_0 = v_1E_1 + v_2E_2$ tal que $\mathcal{E} = \langle v_0, E_3\rangle$. Seja $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to F$ o levantamento a partir do ponto p_0 do caminho $\gamma : [0,1] \to G$ definido por $\gamma(t) = exp(t\lambda v_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos $p_1 = \widetilde{\gamma}(1)$. Então, o levantamento do caminho γ_3^+ a partir do ponto p_1, $\widetilde{\gamma}_3^{p_1}$, é homotópico a $\widetilde{\gamma}^{-1}\widetilde{\gamma}_3^{p_0}\widetilde{\gamma}$ em F. Logo

$$\xi_{p_1}(\widetilde{\gamma}_3^{p_1}) = \xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}) \cdot \xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}_3^{p_0}) \cdot \xi_{p_1}(\widetilde{\gamma}^{-1}). \tag{5.4}$$

Decorre daí que $\xi_{p_1}(\widetilde{\gamma}_3^{p_1}) = \xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}_3^{p_0}) \cdot (0, 0, f(p_1))$ onde $f : M_0 \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. Ora, como M_0 é compacta , existe $N > 0$ tal que

$$|f(p)| < N$$

para todo $p \in M_0$.
Suponhamos por absurdo que $\dim(\tau_a^{p_0}(\mathcal{E})) = 2$, i.e., $\tau_a^{p_0}(v_0) \wedge \tau_a^{p_0}(E_3) \neq 0$ onde $\wedge$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^2$. Sem perda de generalidade consideremos $\tau_a^{p_0}(v_0) \wedge \tau_a^{p_0}(E_3) > 0$. Como $\lim_{t\to\infty}(1/t)\pi_G(\xi_{p_0}(tv_0)) = \tau_a^{p_0}(v_0)$, resulta que

$$\lim_{t\to\infty} \pi_G(\xi_{p_0}(tv_0)) \wedge \tau_a^{p_0}(E_3) = +\infty.$$

Então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\pi_G(\xi_{p_0}(t_0v_0)) \wedge \tau_a^{p_0}(E_3) > 2N.$$

Ora, tomemos $\lambda = t_0$. Segue de (5.4) que

$$\xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}) \cdot \xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}_3^{p_0}) \cdot \xi_{p_1}(\widetilde{\gamma}^{-1}) \cdot \xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}_3^{p_0})^{-1} = \xi_{p_1}(\widetilde{\gamma}_3^{p_1}) \cdot \xi_{p_0}(\widetilde{\gamma}_3^{p_0})^{-1},$$

isto é,

$$(0, 0, \pi_G(\xi_{p_0}(t_0v_0)) \wedge \tau_a^{p_0}(E_3)) = (0, 0, f(p_1)),$$

o que é uma contradição. Portanto $\tau_a(\mathcal{E})$ tem dimensão 1. $\square$

5.4 Demonstração do Teorema 3

Vamos fazer a prova pelo absurdo. Suponhamos que existe uma sequencia $\{\widetilde{\theta}_k\}_{k\geq 0}$ de C^1-perturbações excelentes de θ com $d_{C^1}(\widetilde{\theta}_k, \theta) \to 0$ e tal que a órbita de cada $\widetilde{\theta}_k$ passando pelo ponto $([I], 0)$ é não compacta. Além disso, suponhamos também que $\widetilde{\theta}_k$ coincide com θ fora de uma vizinhança de $G/H \times \{0\}$.
Sabemos que para cada $\widetilde{\theta}_k$ podemos definir uma subálgebra $\widetilde{\mathcal{F}}_k \subset \mathcal{G}$ como na proposição 5.4 e tem-se que $\widetilde{\mathcal{F}}_k = \langle \lambda_k E_1 + \beta_k E_2, E_3 \rangle$ onde $\lambda_k, \beta_k \in \mathbb{R}$. Pela compacidade de S^1 podemos supor que as $\widetilde{\mathcal{F}}_k'$s convergem a uma subálgebra $\mathcal{F} = \langle \lambda E_1 + \beta E_2, E_3 \rangle$ para algum $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Ora, como $det\widehat{A}(0) \neq 0$, existe um vetor não nulo $w_0 \in \mathcal{F}$ tal que $v_0 = \pi_{\mathcal{G}}((A^{-1})'(0)w_0)$ é não nulo. Sejam $w_k \in \widetilde{\mathcal{F}}_k$ vetores não nulos tais que $w_k \to w_0$ e τ_a^k a versão de τ_a associada a $\widetilde{\theta}_k$. Calculemos $\tau_a^k(w_k)$ a partir dos pontos $([I], 0)$ e $([I], f_i^+(0))$, os denotaremos por q_k^- e q_k^+ (o indice i tomado de forma que $f_i^+(0) > 0$). De acordo com o corolario 5.11 devemos ter $q_k^- = q_k^+$.

Mostraremos que para k suficientemente grande $(q_k^+ - q_k^-)\cdot v_0 > 0$, sendo esta a desejada contradição. Sejam M_k^-, M_k^+ as variedades construídas na proposição 5.4 a partir dos pontos $([I],0)$ e $([I], f_i^+(0))$ respectivamente (algumas vezes omitiremos o subindice k para simplificar a notação). Como $q_k^\pm = \int_{M_k^\pm} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p^k(w_k))dp$ resulta que $q_k^\pm \cdot v_0 = \int_{M_k^\pm} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p^k(w_k))\cdot v_0 dp$. Subtraindo e usando o Teorema Fundamental do Calculo temos

$$\begin{aligned}
(q_k^+ - q_k^-)\cdot v_0 &= \int_{G/H} \pi_{\mathcal{G}}((\tilde{\tau}_{p^+} - \tilde{\tau}_{p^-})w_k)\cdot v_0 \, dm(p) \\
&= \int_{G/H} \pi_{\mathcal{G}}\bigg(\int_{z_{p^-}}^{z_{p^+}} \frac{\partial}{\partial z}\,\tilde{\tau}_{(p,z)} dz\,(w_k)\bigg)\cdot v_0 \, dp \\
&= \int_{G/H}\int \pi_{\mathcal{G}}\big(\frac{\partial}{\partial z}\,\tilde{\tau}_{(p,z)}(w_k)\big)\cdot v_0 \, dz\, dp
\end{aligned}$$

Como $d\,(\widetilde{\theta}_k, \theta) \to 0$, para k grande $(\partial/\partial z)\,\tilde{\tau}^k$ está muito próxima de $(A^{-1})'(0)$ e w_k está também próximo de w_0. Em outras palavras, para k suficientemente grande, a expressão no interior da última integral está muito próxima de $\pi_{\mathcal{G}}((A^{-1})'(0)w_0)\cdot v_0 = v_0 \cdot v_0$ e portanto é estritamente positiva. Isto conclui a prova da desigualdade, a qual, como foi visto, contradiz o corolario 5.11. $\square$

5.5 Demonstração do Teorema 4

Por absurdo, suponha que existe $\widetilde{\theta}$ uma C^1-perturbação excelente suficientemente próxima de θ tal que a órbita passando pelo ponto $([I],0)$, denotada por F, é não compacta.

Seja $\mathcal{E}$ a subálgebra das direções quase horizontais dada na proposição 5.4. Podemos supor, sem perda de generalidade, que F é uma órbita regular. Então, pelo lema 5.13 a imagem de τ_a,$\tau_a(\mathcal{E})$, tem dimensão 1 e é constante em $\{[I]\}\times(-\epsilon,\epsilon)\cap F$. Seja $v_0 \in \mathbb{R}^2$ não nulo tal que $v_0 \perp \tau_a(\mathcal{E})$. Como $\widehat{A}(0)$ tem autovalores não reais, $\widehat{A}(0)v\cdot v_0 \neq 0$ para todo $v \in \tau_a(\mathcal{E})$. Isto implica que $\pi_{\mathcal{G}}((A^{-1})'(0)w_0)\cdot v_0 > 0$ para algum $w_0 \in \mathcal{E}$. Calculemos $\tau_a(w_0)$ a partir dos pontos $([I],0)$ e $([I], f_i^+(0))$, os denotaremos por q^- e q^+. De acordo com o lema 5.12, $q^-, q^+ \in \tau_a(\mathcal{E})$.

Mostraremos que $(q^+ - q^-)\cdot v_0 > 0$, sendo esta a desejada contradição. Sejam M^-, M^+ as variedades construídas na proposição 5.4 a partir dos pontos $([I],0)$ e $([I], f_i^+(0))$ respectivamente. Como $q^\pm = \int_{M^\pm} \pi_{\mathcal{G}}(\tilde{\tau}_p(w_0))dp$, subtraindo e usando o Teorema Fundamental do Calculo temos

$$
\begin{aligned}
(q^+ - q^-) \cdot v_0 &= \int_{G/H} \pi_{\mathcal{G}}((\tilde{\tau}_{p^+} - \tilde{\tau}_{p^-})w_0) \cdot v_0 \, dm(p) \\
&= \int_{G/H} \pi_{\mathcal{G}}\left(\int_{z_{p^-}}^{z_{p^+}} \frac{\partial}{\partial z} \, \tilde{\tau}_{(p,z)} dz \, (w_0) \right) \cdot v_0 \, dp \\
&= \int_{G/H} \int \pi_{\mathcal{G}}\big(\frac{\partial}{\partial z} \, \tilde{\tau}_{(p,z)}(w_0) \big) \cdot v_0 \, dz \, dp
\end{aligned}
$$

Para $\widetilde{\theta}$ uma C^1-perturbação excelente suficientemente próxima de θ temos que $(\partial/\partial z) \, \tilde{\tau}^k$ está muito próxima de $(A^{-1})'(0)$. Logo a expressão no interior da última integral está muito próxima de $\pi_{\mathcal{G}}((A^{-1})'(0)w_0) \cdot v_0$ e portanto é estritamente positiva. Isto prova a desigualdade, a qual dá a contradição procurada e conclui a demonstração do teorema. $\square$

Bibliografia

[1] C. Camacho, A. Lins Neto, *Teoria geométrica das folheações,* Projeto Euclides, IMPA, 1979.

[2] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore,* J. Math. Pure et Appl. 11, ser. 9, 1932.

[3] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences,* Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], New York-London-Sydney, 1974.

[4] R. Mañe, *Ergodic theory and differentiable dynamics,* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.

[5] N. C. Saldanha, *Stability of compact actions of* $\mathbb{R}^n$ *of codimensional one,* Comment. Math. Helvetici 69, 431-446, 1994.