

PUC-Rio
PUC por um dia
Olimpíada Relâmpago
Data: 15 de abril de 2011
GABARITO

1. Uma melancia de massa 10 kg contém 99% de água. Após deixá-la aberta por algum tempo, um agricultor verificou que um pouco de água havia evaporado, deixando-a com 98% de água. Qual a massa da melancia (ou do que sobrou da melancia) após a evaporação?

Solução:

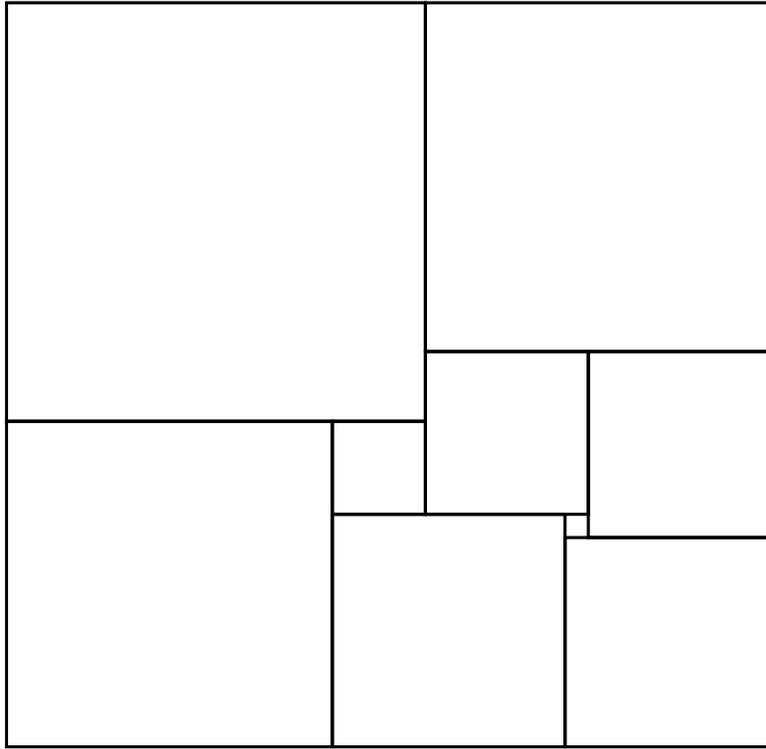
No início do problema, a melancia consiste de 9.9 kg de água e 0.1 kg de outras substâncias. No final do problema ela tem uma massa M e os 0.1 kg de outras substâncias agora correspondem a 2% da massa total, ou seja,

$$\frac{2M}{100} = 0,1$$

donde M é 5 kg.

Este problema caiu na primeira fase de alguma OBM (desculpem, não sei qual!); quase todo ano cai uma variante do problema na primeira fase da OBM.

2. A figura mostra um retângulo decomposto como a união disjunta de 9 quadrados de lados diferentes.



Determine a razão entre os lados do retângulo.

3. Um móvel tem três gavetas iguais. Em uma gaveta há duas bolas brancas, em outra há duas bolas pretas e na terceira há uma bola branca e outra preta. Abrimos uma gaveta ao acaso e tiramos uma bola ao acaso sem olhar a segunda bola que está na gaveta. A bola que tiramos é branca. Qual é a probabilidade de que a segunda bola que ficou sozinha na gaveta seja também branca?

Solução:

Vamos numerar as bolas: as duas bolas brancas que ficam juntas têm números 1 e 2; a bola branca 3 fica junto com a bola preta 4; as bolas 5 e 6 são pretas.

Pelo enunciado a bola que retiramos pode ser 1, 2 ou 3, com igual probabilidade para cada uma. Se tivermos tirado a bola 1 ou 2 a bola que ficou sozinha será branca; se tivermos tirado a bola 3 a bola que ficou sozinha será preta. Assim a probabilidade pedida é igual a $\frac{2}{3}$.

4. Arnaldo, Bernaldo e Cernaldo estão em um quarto e cada um tem um chapéu com um inteiro positivo (os inteiros não são necessariamente distintos). Um dos três números é a soma dos outros dois (mas não se sabe qual). Cada um dos três vê os números nos outros dois chapéus mas não vê o próprio. Os três jogadores são extremamente inteligentes. Estas informações são conhecimento comum entre os três jogadores. Assim, por exemplo, Bernaldo confia na inteligência de Arnaldo (e Cernaldo sabe disso). Um juiz entra no quarto e pergunta a Arnaldo se ele sabe o seu número. Ele diz que não. O juiz faz a mesma pergunta para Bernaldo, que também não sabe responder. Ele faz a mesma pergunta para Cernaldo e este diz: “Meu número é 35”.

Quais são os números de Arnaldo e Bernaldo?

Solução:

Vamos representar a configuração de números por uma tripla ordenada (a, b, c) onde a é o número do chapéu de Arnaldo e assim por diante.

Na primeira pergunta Arnaldo só tem como saber o seu número se a configuração for da forma $(2x, x, x)$ pois ele sabe que seu número é positivo.

Na segunda pergunta Bernaldo tem como saber seu número se a configuração for $(x, 2x, x)$. Mas se a configuração for $(2x, 3x, x)$ ele também sabe seu número pois ele sabe que se a configuração fosse $(2x, x, x)$ então Arnaldo já teria sabido a resposta na primeira pergunta. Estas são as duas únicas situações nas quais Bernaldo é capaz de deduzir seu número.

Finalmente, Cernaldo sabe que a configuração não é de nenhuma das formas $(2x, x, x)$, $(x, 2x, x)$ ou $(2x, 3x, x)$ e portanto ele é capaz de deduzir seu número nas configurações $(x, x, 2x)$, $(2x, x, 3x)$, $(x, 2x, 3x)$ e $(2x, 3x, 5x)$ (e apenas nestas).

Sabemos que o número que ele deduziu foi 35. Como 35 não é múltiplo de 2 nem de 3, isto elimina as três primeiras configurações. Assim só resta a última e temos $x = 7$. Os números de Arnaldo e Bernaldo são portanto iguais a 14 e 21, respectivamente.