

PUC-Rio
Olimpíada Relâmpago
Data: 16 de abril de 2010
Gabarito

1. Uma melancia de massa 10 kg contém 99% de água. Após deixá-la aberta por algum tempo, um agricultor verificou que um pouco de água havia evaporado, deixando-a com 98% de água. Qual a massa da melancia (ou do que sobrou da melancia) após a evaporação?

Solução:

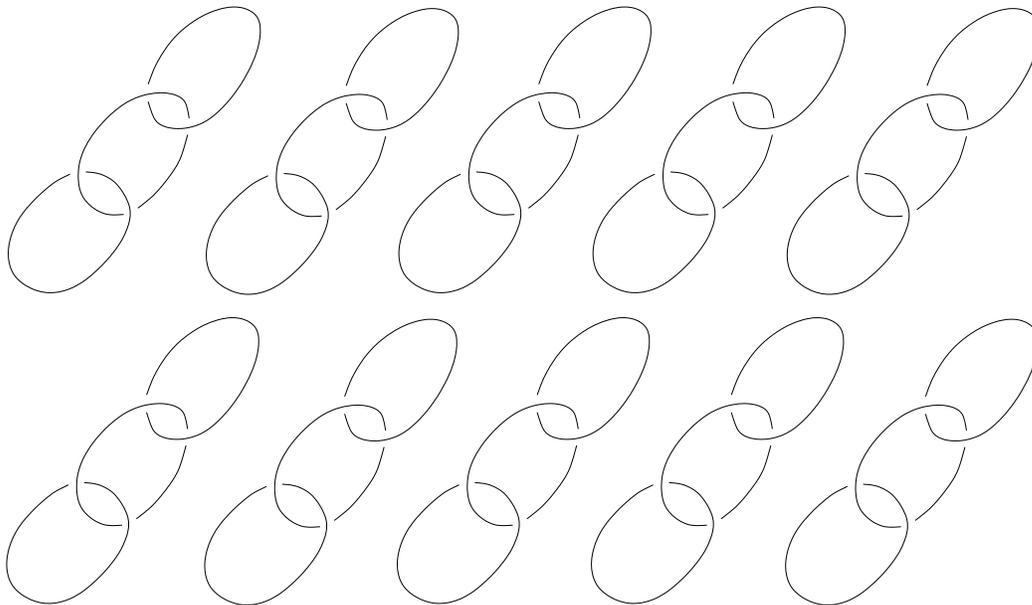
No início do problema, a melancia consiste de 9.9 kg de água e 0.1 kg de outras substâncias. No final do problema ela tem uma massa M e os 0.1 kg de outras substâncias agora correspondem a 2% da massa total, ou seja,

$$\frac{2M}{100} = 0,1$$

donde M é 5 kg.

Este problema caiu na primeira fase de alguma OBM (desculpem, não sei qual!); quase todo ano cai uma variante do problema na primeira fase da OBM.

2. Um serralheiro tem 10 pedaços de 3 elos de ferro cada um, mostrados abaixo. Ele quer fazer uma única corrente de 30 elos. Para abrir e depois soldar um elo o serralheiro leva 5 minutos. Quantos minutos no mínimo ele levará para fazer a corrente?



Solução:

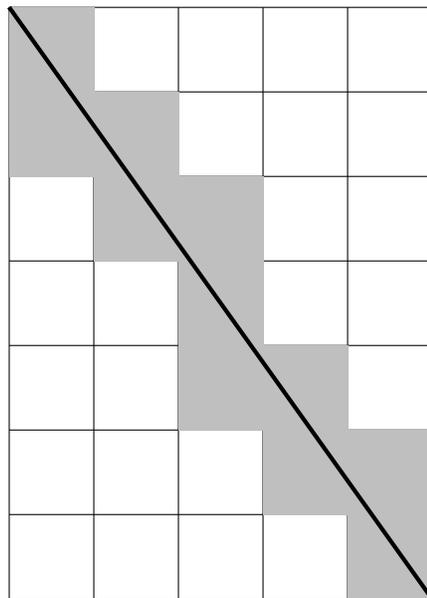
O serralheiro deve abrir os três elos do primeiro pedaço de corrente, os três elos do segundo pedaço de corrente e um elo do terceiro pedaço. Agora ele tem sete elos abertos e oito pedaços de corrente: ele usa os elos abertos para juntar os pedaços. O processo leva 35 minutos.

Existem outras soluções mais longas. É possível demonstrar que não existe solução mais curta.

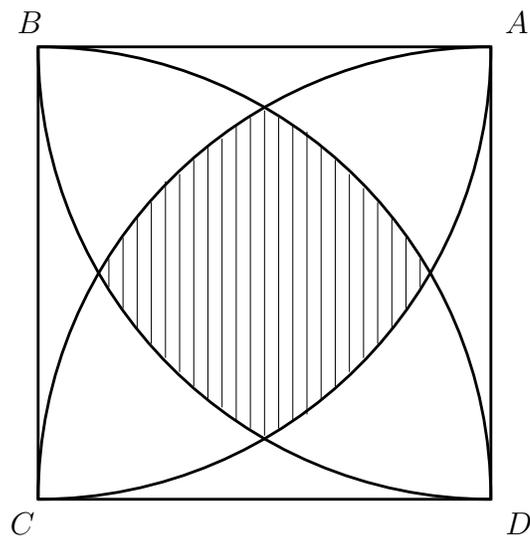
3. Um retângulo de lados 45 cm e 63 cm é dividido por retas verticais e horizontais em quadradinhos de lado 1 cm. Traçamos uma diagonal do retângulo; quantos quadradinhos são cortados pela diagonal?

Solução: Como $\text{mdc}(45, 63) = 9$ a diagonal passa pelos pontos $(5, 7)$, $(10, 14)$, \dots $(40, 56)$ e $(45, 63)$. Devemos contar os quadradinhos cortados entre o ponto $(0, 0)$ e o ponto $(5, 7)$ e multiplicar este valor por 9.

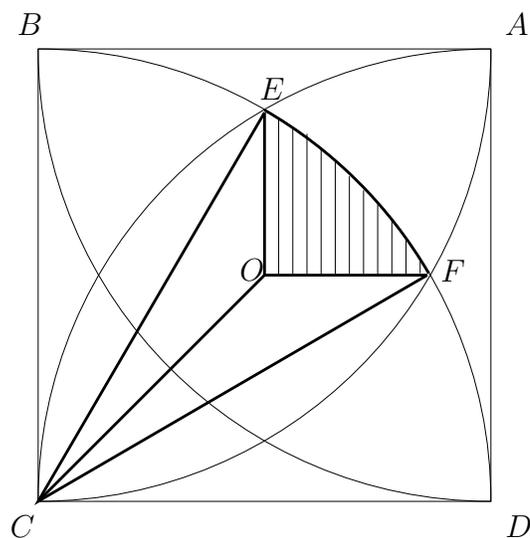
O retângulo menor (5×7) é cortado por 4 retas horizontais e 6 retas verticais e a diagonal corta estas retas em 10 pontos distintos. Estes pontos de interseção são as fronteiras entre quadradinhos cortados pela diagonal, donde há 11 quadradinhos cortados pela diagonal. Assim há 99 quadradinhos no retângulo original cortados pela diagonal.



4. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Trace círculos de raio 1 com centro em cada um dos quatro vértices. Determine a área da região interior aos quatro círculos (indicada na figura).



Solução: Sejam E e F as interseções entre círculos indicadas na figura abaixo. Os triângulos CDE e BCF são equiláteros logo $\widehat{ECF} = \pi/6$. Assim a área da “fatia” ECF é igual a $\pi/12$.



Seja O o centro do quadrado. Os triângulos ECO e CFO têm base $(\sqrt{3} - 1)/2$ e altura $1/2$ logo área $(\sqrt{3} - 1)/8$ cada. Assim a área da região EOF indicada na figura é $\pi/12 - (\sqrt{3} - 1)/4$ e a área pedida é igual a $\pi/3 + 1 - \sqrt{3}$.