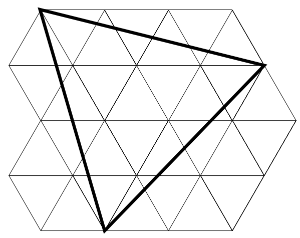
PUC-Rio
Olimpíada Relâmpago — GABARITO
Data: 17 de abril de 2009

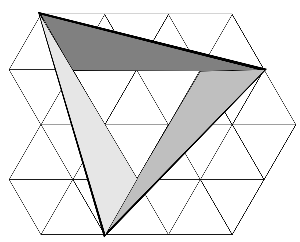
1. Na figura abaixo, os triângulos pequenos (traçados com linha fina) são equiláteros e têm área igual a 1. Calcule a área do triângulo grande (traçado com linha grossa).



Solução:

A área do triângulo grande é igual a 13.

Uma forma de ver isso é decompor o triângulo grande em quatro peças triangulares conforme mostrado na figura abaixo. A peça central tem área 4 pois é formada por quatro triângulos pequenos. Cada uma das outras peças tem área 3 pois é a metade de um paralalogramo formado por seis triângulos pequenos.



2. Numa floresta há uma espécie de sapo com indivíduos azuis e verdes; inicialmente 95% deles eram verdes. Houve uma peste e vários sapos verdes morreram mas os azuis eram imunes e nenhum morreu. Passada a peste, 80% dos sapos eram verdes. Que porcentagem da população total inicial de sapos foi morta pela peste?

   Solução:

   Seja N o número inicial de sapos. O número inicial de sapos verdes é $95N/100 = 19N/20$ e o de sapos azuis é portanto $N/20$.

   Seja M o número de sapos depois da peste. O número de sapos verdes é $80M/100 = 4M/5$ e o de sapos azuis é portanto $M/5$.

   Como nenhum sapo azul morreu, temos $N/20 = M/5$ donde $M = N/4$. Assim morreram $3/4$ ou 75% dos sapos.

3. Considere a sequência

$$0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, \ldots$$

   definida por

$$f(0) = 0, \quad f(2n) = f(n), \quad f(2n+1) = 1 + f(n).$$

   Assim, por exemplo, $f(11) = 3$ e $f(15) = 4$.

   Encontre todas as soluções de $f(n) = 10$ com $n \leq 2009$.

   Solução:

   Se escrevermos n na base 2, $f(n)$ é o número de algarismos 1. Assim, por exemplo, $f(1023) = f((1111111111)_2) = 10$. As demais soluções de $f(n) = 10$ são

$$1535 = (10111111111)_2, \quad 1791 = (11011111111)_2,$$
$$1919 = (11101111111)_2, \quad 1983 = (11110111111)_2.$$

   Note que $2015 = (11111011111)_2 > 2009$.

4. Arnaldo e Bernaldo disputam um torneio de cara ou coroa com uma moeda comum. Arnaldo anota a cada momento o seu saldo de vitórias, que começa em 0, sobe de 1 a cada vitória e desce de 1 a cada derrota. Se o saldo chegar a $+4$, o torneio termina com a vitória de Arnaldo e se o saldo chegar a -4 o torneio termina com a vitória de Bernaldo.

   Arnaldo acaba de vencer a primeira partida, de modo que seu saldo agora é igual a $+1$. Qual é a probabilidade de que ele ganhe o torneio?

   Solução:

   Seja $P(n)$ a probabilidade de que Arnaldo ganhe o torneio a partir de um momento em que o saldo é igual a n. Por definição, $P(4) = 1$ e $P(-4) = 0$. Além disso, para $-4 < n < 4$, o saldo irá subir ou descer com probabilidade $1/2$ donde

$$P(n) = \frac{P(n-1) + P(n+1)}{2}.$$

   Assim

$$P(-3) = \frac{1}{8}, \quad P(-2) = \frac{2}{8}, \quad P(-1) = \frac{3}{8}, \quad P(0) = \frac{4}{8},$$
$$P(1) = \frac{5}{8}, \quad P(2) = \frac{6}{8}, \quad P(3) = \frac{7}{8}.$$

   Assim, na situação do problema a probabilidade é $5/8$.