

PUC-Rio
Olimpíada Relâmpago
Data: 18 de abril de 2008

1. André, Bernardo, Carlos e Diógenes estão inicialmente juntos e precisam atravessar uma ponte. Infelizmente, a ponte é frágil e só permite que passem uma ou duas pessoas de cada vez. Além disso está escuro e eles só têm uma lanterna e ninguém quer atravessar sem a lanterna. Assim, eles decidem que duas pessoas atravessarão a ponte e uma voltará com a lanterna, continuando assim até todos terem atravessado. André é jovem e rápido e atravessa a ponte em um minuto. Bernardo demora dois minutos, Carlos demora cinco e Diógenes, o mais velho do grupo, demora dez minutos. Quando duas pessoas atravessam a ponte juntas, o mais rápido dos dois deve andar mais devagar, ou seja, vale o tempo maior. Como eles devem proceder para atravessar a ponte no menor tempo possível?

Solução: Atravessam André e Bernardo (2 min), André volta (1 min), Carlos e Diógenes atravessam (10 min), Bernardo volta (2 min), André e Bernardo atravessam (2 min), completando o trajeto em 17 minutos. Outra possibilidade: atravessam André e Bernardo (2 min), Bernardo volta (1 min), Carlos e Diógenes atravessam (10 min), André volta (2 min), André e Bernardo atravessam (2 min), novamente completando o trajeto em 17 minutos.

É impossível realizar o processo em menos tempo. De fato, se Carlos e Diógenes *não* atravessarem juntos a viagem de ida deles demorará 5 min para um e 10 minutos para o outro. Somando pelo menos 2 minutos para a terceira ida e pelo menos 1 minuto para cada volta chegamos a 19 minutos. Se Carlos e Diógenes atravessarem juntos e um dos dois voltar ele deverá ir ainda mais uma vez e em três viagens já chegamos a 20 minutos. As únicas possibilidades para que Carlos e Diógenes atravessem juntos e nenhum dos dois volte são as consideradas acima.

2. Numa floresta há uma espécie de papagaio com indivíduos azuis e verdes; inicialmente 98% deles eram verdes. Houve uma peste e vários papagaios verdes morreram mas os azuis eram imunes e nenhum morreu. Passada a peste, 95% dos papagaios eram verdes. Que porcentagem da população total inicial de papagaios foi morta pela peste?

Solução: Seja N a população total inicial de papagaios: temos $N/50$ papagaios azuis. Seja M a população total final de papagaios: temos $M/20$ papagaios azuis. Como nenhum papagaio azul morreu temos $N/50 = M/20$ donde $M = (2/5)N$. Assim morreram $3/5$ dos papagaios, ou 60%.

3. Um retângulo de lados 23 cm e 37 cm é dividido por retas verticais e horizontais em quadradinhos de lado 1 cm. Traçamos uma diagonal do retângulo; quantos quadradinhos são cortados pela diagonal?

Solução: O retângulo é cortado por 22 retas horizontais e 36 retas verticais. Como $\text{mdc}(23, 37) = 1$ a diagonal corta estas retas em 58 pontos distintos. Estes pontos de interseção são as fronteiras entre quadradinhos cortados pela diagonal, donde há 59 quadradinhos cortados pela diagonal.

4. Jogamos três dados comuns e honestos e somamos os pontos: qual a probabilidade de que este total seja maior ou igual a 16?

Solução: Há 10 possibilidades de tirar pelo menos 16 pontos:

$$\begin{aligned} &6 + 6 + 6, \\ &6 + 6 + 5, \quad 6 + 5 + 6, \quad 5 + 6 + 6, \\ &6 + 5 + 5, \quad 5 + 6 + 5, \quad 5 + 5 + 6, \quad 6 + 6 + 4, \quad 6 + 4 + 6, \quad 4 + 6 + 6. \end{aligned}$$

Como o total de possibilidades é $6^3 = 216$ a probabilidade pedida é $10/216 = 5/108 \approx 0.0463$.