2^(2n-1) odd numbers are chosen from {2^(2n) + 1, 2^(2n) + 2, 2^(2n) + 3, ... , 2^(3n)}. Show that we can find two of them such that neither has its square divisible by any of the other chosen numbers.

Seja $S = \{2^{2n} + 1, 2^{2n} + 3, \ldots, 2^{3n} - 1\}$
Seja r o menor múltiplo de 9 em S.
Defina $T = \{3^i (r + 18j) / i = 0..7,\ j = 0..2^{2n-4} - 1\}$
$9(2^{2n-4} - 1) < 16(2^{2n-4} - 1) = 2^{2n} - 16 < 2^{2n} < r \Rightarrow r + 18(2^{2n-4} - 1) < 3r$
Seja $0 \le i \le k \le 7$ e $0 \le j, l \le 2^{2n-4} - 1$
$3^i (r + 18j) = 3^k (r + 18l) \Leftrightarrow r + 18j = 3^{k-i}(r + 18l)$
Se k = i, temos que j = l.
Se k > i, temos $3^{k-i}(r + 18l) \ge 3r > r + 18(2^{2n-4} - 1) \ge r + 18j$
Isso mostra que $|T| = 8.2^{2n-4} = 2^{2n-1}$.
É fácil ver que todo elemento de T é ímpar, múltiplo de 9 e $\min(T) = r \in S$. Se além disso, $\max(T) < 3^7 (r + 18.2^{2n-4}) \in S$, temos que $T \subset S$.
$3^7 (r + 18.2^{2n-4}) < 3^7 (r + 2^{2n+1}) < 3^7 2^{2n+2}$, isso nos diz que para todo n > 13, temos que $T \subset S$.

Escolha um par (x, y) de elementos de T. Existe uma terna do tipo $(9t, 27t, 81t)$ que contém o elemento x e uma terna que contém o elemento y.
Se eles estão na mesma terna, o elemento restante da terna divide o quadrado de ambos. Se eles estão em ternas distintas, qualquer elemento de suas respectivas ternas dividem seus quadrados.

Mais formalmente: $\forall x, y \in T, \exists w, z \in T - \{x, y\}, w \mid x^2, z \mid y^2$, o que **contradiz** o enunciado!

This document was created with Win2PDF available at http://www.daneprairie.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.