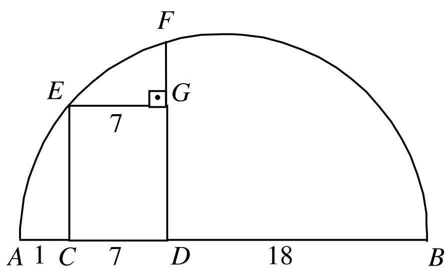
XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 3 (Ensino Médio)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 3

1) D	6) D	11) C	16) C	21) B
2) D	7) B	12) B	17) B	22) A
3) C	8) C	13) B	18) E	23) D
4) D	9) A	14) D	19) B	24) C
5) D	10) B	15) E	20) B	25) D

1. **(D)** $f(4) = 5; f(f(4)) = f(5) = 2; f(f(f(4))) = f(2) = 1; f(f(f(f(4)))) = f(1) = 4.$
Logo, como 2004 é múltiplo de 4, $\underbrace{f(f(...(f(f}_{\text{2004 vezes}}(4))...)) = 4$

2. **(D)**



Sendo G a projeção ortogonal de E sobre o segmento DF, então $EG = 7$.
Como AEB é um triângulo retângulo em E,
$EC^2 = AC \cdot CB \Leftrightarrow EC^{\,2} = 1 \cdot 25 \Leftrightarrow EC = 5.$
Como AFB é um triângulo retângulo em F,
$DF^2 = AD \cdot DB \Leftrightarrow DF^{\,2} = 8 \cdot 18 \Leftrightarrow DF = 12.$
Logo $FG = DF - EC = 7$ e $EF^{\,2} = EG^2 + GF^2 \Leftrightarrow EF = 7\sqrt{2}$.

3. **(C)** Sejam $a \le b \le c$ os lados do triângulo e S a sua área. Temos que
$S = \frac{a \cdot 20}{2} = \frac{b \cdot 15}{2} = \frac{c \cdot 12}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$ e $\frac{b}{c} = \frac{4}{5}$, ou seja, o triângulo tem lados proporcionais a 3, 4, 5 e portanto, seu maior ângulo interno é 90°.

4. **(D)** Veja solução do problema 25 do Nível 2.

5. **(D)** $4 \cdot 8 \cdot 18 \cdot 54 \cdot 192 = (2^2) \cdot (2^3) \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 3^3) \cdot (2^6 \cdot 3) = 2^{13} \cdot 3^6$ Como o produto das incorretas é um cubo perfeito, os expoentes que aparecem na fatoração deste produto em primos devem ser múltiplos de 3. Logo a alternativa correta deve ser da forma $2^a \cdot 3^b$, onde $\frac{2^{13} \cdot 3^6}{2^a \cdot 3^b} = 2^{13-a} \cdot 3^{6-b}$ é tal que $13 - a$ e $6 - b$ são múltiplos de 3 $\Leftrightarrow$ $a - 1$ e b são múltiplos de 3.
Assim, a alternativa correta é a que apresenta $54 = 2 \cdot 3^3$.

6. **(D)** Considere os subconjuntos {1, 9, 17}; {2, 10, 18}, {3, 11, 19}, {4, 12, 20}; {5, 13}; {6, 14}; {7, 15}; {8, 16}. Dos quatro primeiros podemos tomar no máximo 2 elementos e dos demais no máximo 1 de modo a não haver dois números cuja diferença é 8. Logo o menor inteiro n é $4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 13$.

7. **(B)** $a-b=1^2\left(1-\frac{1}{3}\right)+2^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+3^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+...+1001^2\left(\frac{1}{2001}-\frac{1}{2003}\right)=$

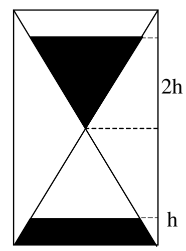
$$\sum_{n=1}^{1001}n^2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=1}^{1001}\frac{2n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{1001}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=$$

$$\frac{1001}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1001}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=500,5+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1001}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Agora podemos observar que

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{1001}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{1001}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2003}\right)<\frac{1}{2}$ e, portanto, o inteiro mais próximo de $a-b$ é 501.

8. **(C)** Quando a altura da areia no cone interior é a metade da altura da areia no cone superior, passaram para o cone inferior $1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$ do volume total de areia.



Portanto demora

$\frac{19}{27}\cdot 1\text{h}30\text{min}=\frac{19}{27}\cdot 5400\text{s}=3800\text{s}=1\text{h}03\text{min}\,20\text{s}.$

9. **(A)** Fazendo $n = 0$, temos $f(0) - f(2) = 9$

Fazendo $n = 2$, temos $f(2) - 3f(0) = 25$

Somando as duas igualdades, obtemos $-2f(0) = 34$, e logo $f(0) = -17$.

10. **(B)** É possível formar os números $10a+b,\ 10b+a,\ 10a+c,\ 10c+a,\ 10b+c,\ 10c+b$ cuja soma é $22(a+b+c)$. Logo $22(a+b+c)=484 \Leftrightarrow a+b+c=22.$ Então, sendo $0\le a<b<c\le 9$, c é igual a 9.

Listando as possibilidades, {6, 7, 9} e {5, 8, 9}.

11. **(C)** Seja a o número de faces ocres do segundo cubo, que tem portanto $6 - a$ faces magentas. A probabilidade de as duas faces terem a mesma cor (Ocre e ocre ou magenta e magenta) é

$\frac{5\cdot a+1\cdot(6-a)}{36}=\frac{4a+6}{36}=\frac{2a+3}{18}.$

Temos $\frac{2a+3}{18}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+3=9\Leftrightarrow a=3.$

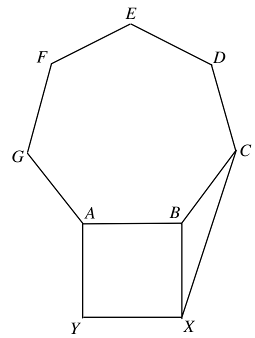
12. **(B)** Veja Solução do Problema 10 do Nível 2.

13. **(B)** Veja Solução do Problema 12 do Nível 2.

14. **(D)** Observemos que todos os números primos menores ou iguais a n aparecem na fatoração de $n!$. Como 17 não é fator de $n!$, temos $n < 17$. Alem disso, como $n!$ tem 3 fatores 5 e os três primeiros múltiplos de 5 são 5, 10 e 15, que não têm mais de um fator 5, temos $n\ge 15$. Logo $n = 15$ ou $n = 16$.

Como há $\frac{16}{2}=8$ números pares menores ou iguais a 16, sendo $\frac{16}{4}=4$ múltiplos de 4, $\frac{16}{8}=2$ múltiplos de 2 e 1 múltiplo de 16, 16! admite $8 + 4 + 2 + 1 = 15$ fatores 2, logo $n = 16$.

15. (E)



Sendo $A\widehat{B}C$ um dos ângulos internos do heptágono, $m(A\widehat{B}C)=\frac{(7-2)\cdot\pi}{7}=\frac{5\pi}{7}rad$. Assim, como $m(A\widehat{B}X)=90°=\frac{\pi}{2}rad$, $m(X\widehat{B}C)=2\pi-m(A\widehat{B}C)-m(A\widehat{B}X)=2\pi-\frac{5\pi}{7}-\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{14}rad$.
Sendo $BX=AB=BC$, o triângulo XBC é isósceles. Portanto $m(B\widehat{X}C)=\frac{\pi-m(X\widehat{B}C)}{2}=\frac{\pi-\frac{11\pi}{14}}{2}=\frac{3\pi}{28}rad$.

16. (C) Lembrando que $\left(|x|=x\Leftrightarrow x\geq 0\right)$ e $\left(|x|=-x\Leftrightarrow x\leq 0\right)$

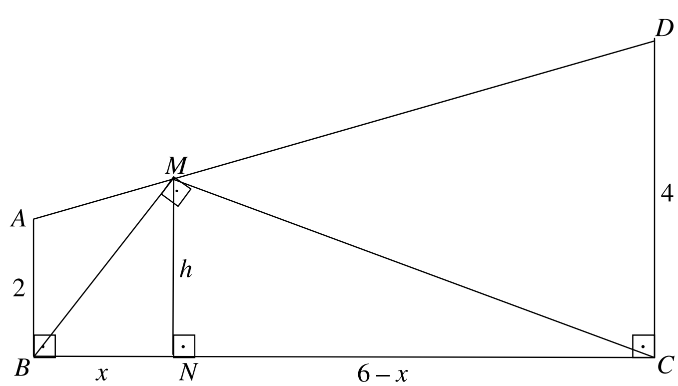
$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x+2\sqrt{x-1}+2\cdot\sqrt{(x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})}+x-2\sqrt{x-1}=4\\ x-2\sqrt{x-1}\geq 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-4x+4}=2-x\\ x^2\geq 4x-4\\ x-1\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}|x-2|=-(x-2)\\ x\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x-2\leq 0\\ x\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$$

Logo o conjunto das raízes da equação é o intervalo [1;2].

17. (B) Sejam $MN = h$ e $BN = x$. Pelas relações métricas no triângulo retângulo BMN, $MN^2=BN\cdot NC\Leftrightarrow h^2=x(6-x)$ (I).



Além disso, na segunda figura, os triângulos AMF e ADE são semelhantes, logo

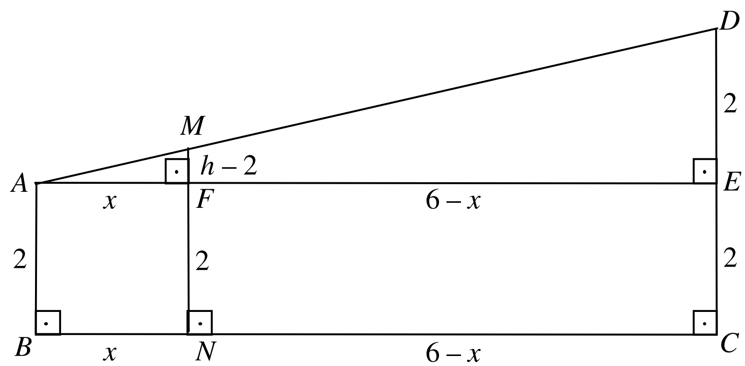
$\frac{AF}{AE} = \frac{MF}{DE} \Leftrightarrow \frac{x}{6} = \frac{h-2}{2} \Leftrightarrow h = \frac{x}{3} + 2.$ Substituindo em (I), obtemos

$$\left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 = x(6-x) \Leftrightarrow 5x^2 - 21x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{6}{5}.$$

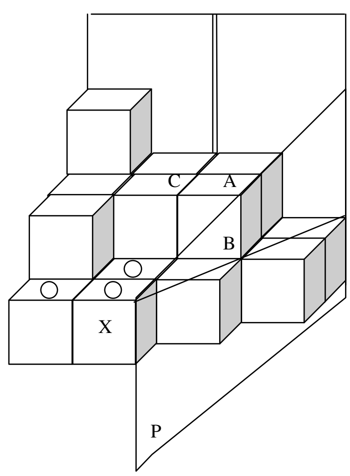
Como o triângulo BMC não é isósceles, $x = \frac{6}{5}.$

Assim, considerando que a altura relativa ao lado AB do triângulo ABM mede x, a área desse triângulo é $\frac{AB \cdot x}{2} = \frac{2 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{5}.$

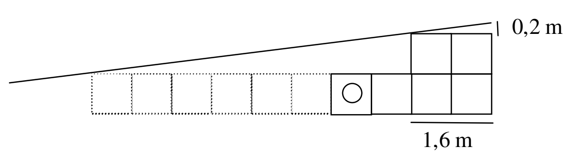


18. (E) Veja Solução do Problema 3 do Nível 2.

19. (B)



Do lado de fora da loja, uma pessoa avista 14 blocos, no máximo. São eles os 8 blocos na frente da loja, mais 2 na base inferior e mais 4 na base intermediária da pilha. Ele deixa de enxergar os 3 blocos marcados com um círculo na figura à esquerda. Destacamos na figura o plano vertical P, para mostrar que a aresta AB impede a visão da aresta vertical do bloco X, que fica totalmente oculto. A visão por cima também não alcança os 3 blocos marcados com um círculo, porque o plano de visão determinado pela aresta AC tem declividade $^1/_8$ (veja a figura abaixo).



20. (B) Veja Solução do Problema 23 do Nível 1.

21. **(B)** As 10 notas medianas são maiores ou iguais à maior das 10 piores notas e são menores ou iguais à menor das 10 melhores notas. Logo as 10 notas medianas são maiores ou iguais a 3 e menores ou iguais a 9.
Deste modo, sendo M a média da sala,

$$\frac{10\cdot 3+10\cdot 3+10\cdot 9}{30}\le M\le \frac{10\cdot 3+10\cdot 9+10\cdot 9}{30}\Leftrightarrow 5\le M\le 7$$

22. **(A)** Veja a Solução do Problema 20 do Nível 2.

23. **(D)** Seja $N=x^2$, x inteiro positivo. Ao trocar cada algarismo de N pelo seu sucessor, obtemos um número 1 dezena e 1 unidade maior, ou seja, $N+11$.
Como $N+11$ é quadrado perfeito, $N+11=y^2$, sendo y inteiro positivo. Logo $x^2+11=y^2\Leftrightarrow (y-x)(y+x)=11\Leftrightarrow y-x=1$ e $y+x=11\Leftrightarrow x=5$ e $y=6$. Logo $N=5^2=25$, cuja soma dos algarismos é 2 + 5 = 7.

24. **(C)** Vamos primeiro contar os agrupamentos 21 obtidos a partir de um par de números consecutivos tal que o primeiro termina com 2 e o segundo começa com 1, que são os seguintes 11 casos:
12 13, 102 103, 112 113,...,192 193.
Vamos agora listar os números que têm o agrupamento 21 no meio de sua representação decimal:
21, 121, 221,…,921
210, 211,…,219
Temos então 20 números nesse segundo caso, e portanto a resposta é 11 + 20 = 31.

25. **(D)** Veja a solução do problema 21 do Nível 1.