XXVI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA FASE – NÍVEL 2 (7ª ou 8ª Séries)
GABARITO

GABARITO NÍVEL 2

1) A	6) B	11) D	16) C	21) D
2) C	7) C	12) B	17) E	22) C
3) D	8) C	13) C	18) E	23) C
4) B	9) A	14) E	19) C	24) D
5) C	10) B	15) D	20) A	25) D

1. **(A)** Veja solução do Problema 3 do Nível 1.

2. **(C)** $\frac{22\nabla 26}{4\nabla 6} = \frac{22+23+24+25+26}{4+5+6} = \frac{120}{15} = 8$

3. **(D)** Veja solução do Problema 25 do Nível 1.

4. **(B)** Veja solução do Problema 23 do Nível 1.

5. **(C)** Veja solução do Problema 14 do Nível 1.

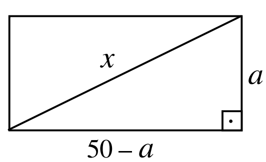
6. **(B)** Veja solução do Problema 16 do Nível 1.

7. **(C)** Há 2004 escolhas para a primeira bala e 2003 para a segunda bala. Assim, podemos retirar duas balas de $2004 \cdot 2003$ maneiras, considerando a ordem em que são retiradas.

Podemos retirar duas balas de banana de $1002 \cdot 1001$ maneiras e duas balas de maçã de $1002 \cdot 1001$ maneiras. Logo $p = \frac{2 \cdot 1002 \cdot 1001}{2004 \cdot 2003} = \frac{1001}{2003}$

Podemos retirar uma bala de banana e uma bala de maçã, nessa ordem, de $1002 \cdot 1002$ maneiras, e uma bala de maçã e uma bala de banana, nessa ordem, de $1002 \cdot 1002$ maneiras. Logo $q = \frac{2 \cdot 1002 \cdot 1002}{2004 \cdot 2003} = \frac{1002}{2003}$. Logo a diferença entre p e q é $\frac{1002}{2003} - \frac{1001}{2003} = \frac{1}{2003}$.

8. **(C)** Sejam a e $50 - a$ os lados do retângulo. A área procurada é $(50 - a) \cdot a = 50a - a^2$.



Pelo teorema de Pitágoras,

$$x^2 = (50 - a)^2 + a^2 \Leftrightarrow x^2 = 2500 - 100a + 2a^2 \Leftrightarrow 50a = 1250 + a^2 - \frac{x^2}{2}.$$

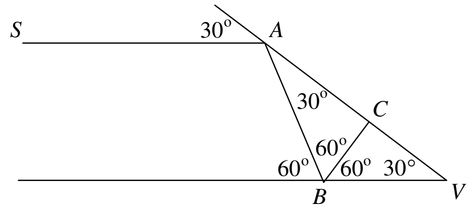
Deste modo, $50a - a^2 = 1250 + a^2 - \frac{x^2}{2} - a^2 = 1250 - \frac{x^2}{2}$.

9. **(A)** Veja solução do Problema 19 do Nível 1.

10. **(B)** Inicialmente, $m^2 - 2$ deve ser positivo e divisor de 2004. Os divisores de 2004 são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 167, \pm 334, \pm 501, \pm 668, \pm 1002$ ou ± 2004. Para m inteiro positivo tal fato ocorre quando $m = 2$ ou $m = 13$.

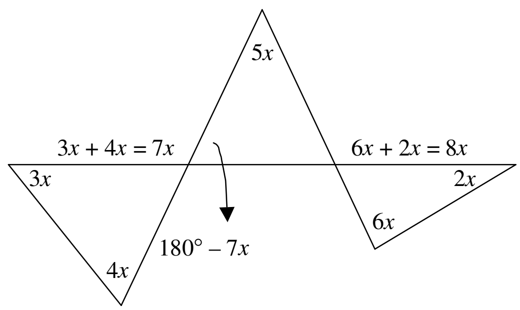
11. **(D)** $(x + y)^2 = 8^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 64$. Logo $x^2 + 6xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4xy = 64 + 4 \cdot 15 = 124$.

12. (B)



O raio de luz percorre o trajeto S-A-B-C-B-A-S. Temos $SA = 1m$, $AC = CV = 0,5m$, $\frac{AC}{AB} = \cos 30^\circ \Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{3}m$ e $\frac{BC}{AC} = \text{tg}30^\circ \Leftrightarrow BC = \frac{\sqrt{3}}{6}m$. Logo a distância percorrida pelo raio de luz é $2(SA + AB + BC) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 2 + \sqrt{3}m$.

13. (C)



Temos: $8x = 180^\circ - 7x + 5x \Leftrightarrow 10x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 18^\circ$.

14. (E) $2(2^{2x}) = 4^x + 64 \Leftrightarrow 2(2^{2x}) = 2^{2x} + 64 \Leftrightarrow 2^{2x} = 64 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

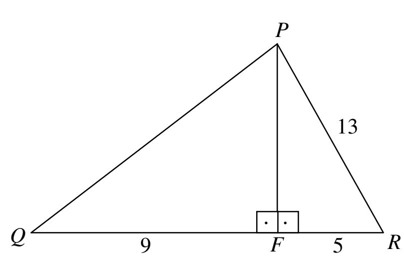
15. (D) A soma dos algarismos de um número de três algarismos é menor ou igual a 27 e maior ou igual a 1. Logo, a soma da soma dos algarismos de um número de três algarismos é a soma dos algarismos dos números 1, 2, 3,…, 27, cujo maior valor obtido é 10.

16. (C) Veja solução do Problema 10 do Nível 1.

17. (E) Os pontos que estão a 6cm de distância do ponto P formam uma circunferência de centro P e raio 6cm. Uma circunferência corta uma reta em, no máximo, 2 pontos. Como o quadrado é formado por 4 segmentos de reta, há no máximo 8 pontos da borda do quadrado a uma distância de 6cm do ponto P.
Tomando P como o centro do quadrado, temos um exemplo de circunferência que corta o quadrado em 8 pontos.

18. (E) Veja solução do Problema 18 do Nível 1.

19. (C)



Pelo teorema de Pitágoras, $PF^2 + 5^2 = 13^2$ e $PQ^2 = 12^2 + 9^2 \Leftrightarrow PQ = 15$.

20. (A) Veja solução do Problema 20 do Nível 1.

21. (D) $AE = AF = AB = 3cm$, $m(F\hat{A}D) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $m(F\hat{A}E) = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

Logo ΔFAE é retângulo em A e tem área $\dfrac{AE \cdot AF}{2} = \dfrac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5\text{cm}^2$.

22. (C) Inicialmente, sejam x o lado da folha e y o lado quadrado menor de lado maior que 1cm. Como os demais 41 quadrados têm lado 1cm, x e y são inteiros positivos. Assim:

$x^2 = y^2 + 41 \cdot 1 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 41 \Leftrightarrow x - y = 1$ e $x + y = 41 \Leftrightarrow x = 21$ e y = 20

Portanto o lado da folha mede 21cm.

23. (C) Seja x o lado quadrado. Sua área é x^2. Com 10% a menos de cerca, o lado quadrado passará a ser $0{,}9x$ e terá área $(0{,}9x)^2 = 0{,}81x^2$, que é 0,19 = 19% menor.

24. (D) Veja solução do Problema 13 do Nível 1.

25. (D) Com os dois algarismos 1 juntos, temos os números: 112004, 211004, 201104, 200114 e 200411. Com os dois algarismos 1 separados: 121004, 120104, 120014, 120041, 210104, 210014, 210041, 201014, 201041 e 200141. No total são 15 números.