

PUC-Rio
Desafio em Matemática
11 de outubro de 2014

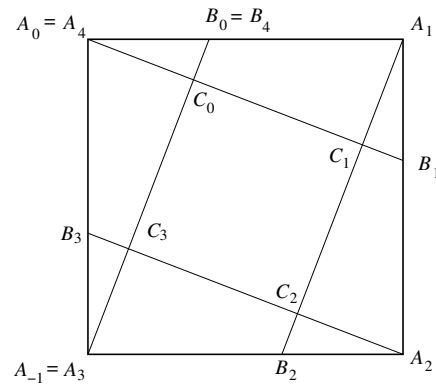
Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,5		
3	1,5		
4	2,0		
5	2,0		
6	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)** Seja $A_0A_1A_2A_3$ um quadrado de lado 1. Convencionamos que $A_4 = A_0$ e $A_{-1} = A_3$. Marcamos um ponto B_k sobre cada lado A_kA_{k+1} de tal forma que os comprimentos dos quatro segmentos A_kB_k sejam todos iguais. Seja C_k o ponto de interseção entre os segmentos A_kB_{k+1} e $A_{k-1}B_k$.



Sabendo que a área do quadrado $C_0C_1C_2C_3$ é igual a $\frac{1}{3}$, determine o comprimento do segmento A_0B_0 .

2. (1,5 ponto) Seja

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Quantas soluções reais distintas tem a equação abaixo?

$$f(f(f(f(x)))) = -f(f(x))$$

3. (1,5 ponto) Defina recursivamente a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$\begin{aligned}g(0) &= 0, & g(1) &= 1, \\g(k+2) &= 2g(k+1) + g(k), & k &\geq 0\end{aligned}$$

de tal forma que, por exemplo,

$$g(2) = 2, \quad g(3) = 5, \quad g(4) = 12, \quad g(5) = 29, \quad g(6) = 70, \quad g(7) = 169.$$

- (a) Demonstre que $g(2k) = g(k)(g(k+1) + g(k-1))$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Encontre todas as potências de 2 na imagem de g .

4. **(2,0 pontos)** Um baralho comum tem 52 cartas divididas em 4 naipes com 13 de cada naipe. Os quatro naipes são: espadas ou ♠; copas ou ♥; paus ou ♣; ouros ou ♦.

Jorge joga um jogo de paciência na qual as cartas são inicialmente embaralhadas e divididas em quatro pilhas de 13 cartas cada. As cartas ficam viradas para baixo, sendo impossível identificá-las sem virá-las.

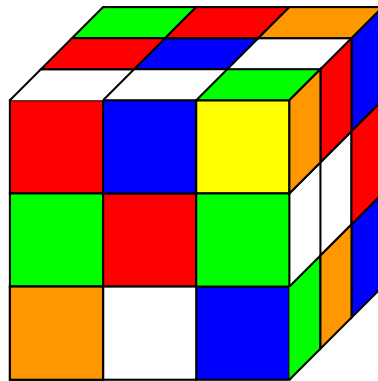
Jorge tira então uma carta do topo da primeira pilha e a examina, prestando atenção ao naipe. O naipe da carta determina uma pilha: espadas para a primeira pilha, copas para a segunda, paus para a terceira e ouros para a quarta. A carta na mão de Jorge vai então para o final (isto é, para a base) da pilha selecionada, mas agora virada para cima. Jorge então tira uma carta do topo da pilha onde ele acaba de inserir uma carta e novamente a examina. Novamente, a carta vai (virada para cima) para o final de uma das quatro pilhas (novamente selecionada conforme o naipe, sempre usando a mesma regra) e depois Jorge tira uma carta do topo desta mesma pilha. O jogo continua desta forma até Jorge inserir uma carta na base de uma pilha onde todas as cartas já estejam viradas para cima: neste momento o jogo acaba.

Qual é a probabilidade de que ao final do jogo todas as 52 cartas estejam viradas para cima?

5. **(2,0 pontos)** Adriel ganhou de presente um falso cubo de Rubik, ou seja, um cubo de aresta 3 em que cada uma das seis faces está coberta com nove etiquetas coloridas quadradas de lado 1. Inicialmente cada face tem etiquetas de uma das cores vermelho, laranja, amarelo, verde, azul e branco, sendo portanto uma face de cada cor.

No verdadeiro cubo de Rubik, é possível girar os nove cubinhos que formam uma face mas o cubo falso que Adriel ganhou é sólido em vez de ser formado de cubinhos.

Adriel decide brincar com o cubo retirando as etiquetas e colando-as novamente em outra posição, respeitando a regra de que cada face deve ser coberta por nove etiquetas coloridas nas posições usuais (mas não necessariamente todas da mesma cor).



Quantas configurações diferentes Adriel consegue formar? Considere que as nove etiquetas de uma mesma cor são indiscerníveis; considere também que se uma configuração pode ser obtida a partir de outra girando o cubo então elas são iguais. Por outro lado, se uma configuração é obtida a partir de outra espelhando o cubo, elas em geral são distintas.

6. **(2,0 pontos)** Um canto de uma sala tem o chão e as duas paredes espelhados. O chão é horizontal e as duas paredes são verticais; o ângulo interno entre as paredes é de 60° . Assim, os dois espelhos nas paredes têm ângulos de 90° e o espelho no chão tem um ângulo de 60° . Se os eixos x e y forem horizontais e o eixo z for vertical, o canto da sala pode ser descrito por

$$z \geq 0, \quad x \geq 0, \quad -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \geq 0.$$

Neste canto da sala há um gato. Assim, quem olha para o canto vê 12 gatos, ou seja, além do gato vê mais 11 imagens refletidas do gato que não se misturam nem se confundem. Se tomarmos um ponto (por exemplo, o nariz do gato), as suas imagens são os vértices de um prisma retangular de base hexagonal.

Descreva como construir um outro canto de sala com as seguintes propriedades:

- o chão e as duas paredes são espelhados;
- o chão é horizontal e a primeira parede é vertical;
- a segunda parede não é nem vertical, nem perpendicular à segunda parede;
- se há um gato no canto da sala, quem olha vê 120 gatos, ou seja, além do gato vê mais 119 imagens refletidas do gato que não se misturam nem se confundem.

Descreva ainda o poliedro que tem por vértices as imagens de um ponto.