

PUC-Rio
Desafio em Matemática
21 de outubro de 2012

Nome: _____ Inscrição: _____
Assinatura: _____ Identidade: _____

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 ponto)**

Encontre todas as raízes reais da equação abaixo.

$$(x - 5\sqrt{x}) - 5\sqrt{x - 5\sqrt{x}} + 6 = 0$$

2. (1,0 ponto)

Seja

$$f(x) = x^{2012} + 2012.$$

Encontre os dois últimos algarismos da expansão decimal de

$$f^{2012}(2012).$$

(Aqui $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ e $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$.)

3. (1,5 pontos)

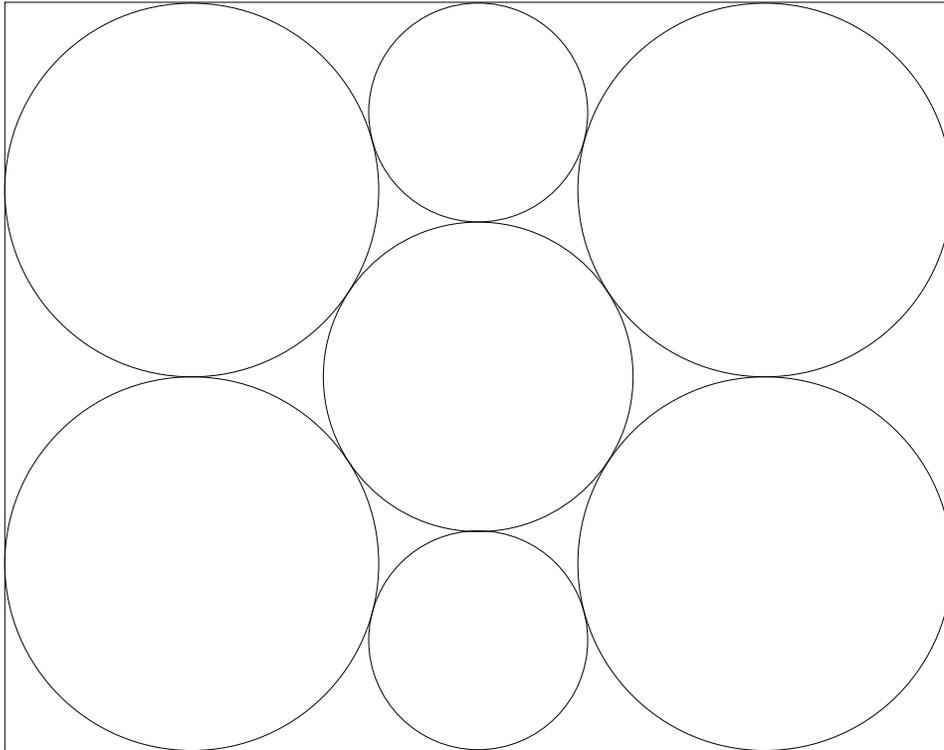
Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| + |x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 63| + |x - 64|.$$

Encontre as soluções de $f(x) = 2012$.

4. (1,5 pontos)

Na figura abaixo os círculos tangenciam os lados do retângulo e se tangenciam uns aos outros.



Determine a razão entre os lados do retângulo.

5. (1,5 pontos)

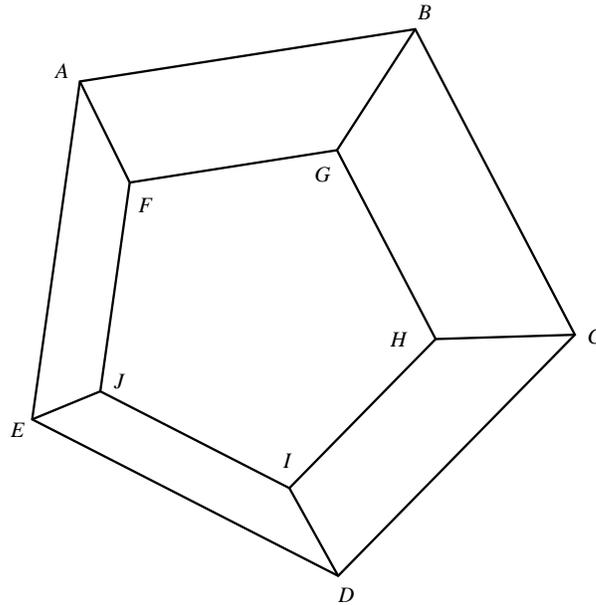
Três urnas são colocadas uma do lado da outra contra uma parede. Em cada urna há inicialmente quatro bolas vermelhas e quatro bolas azuis.

O jogador (que sempre está de frente para a parede) começa em frente à urna do meio e retira de lá uma bola (as bolas são sempre retiradas ao acaso e depois de examinadas são sempre descartadas). Se a bola for vermelha, o jogador se move uma urna para a esquerda; se a bola for azul, ele se move uma para a direita. Ele novamente retira uma bola (ao acaso) da urna que estiver na sua frente neste momento; ele examina a bola (e a descarta). Novamente, se a bola for vermelha, o jogador se move uma urna para a esquerda; se a bola for azul, ele se move uma para a direita. O jogador repete o processo até o jogo terminar, o que ocorre se o jogador receber uma instrução impossível (isto é, se ele tira uma bola vermelha na urna da esquerda ou uma bola azul na urna da direita) ou se ele tentar tirar uma bola de uma urna vazia.

Qual é a probabilidade de que o jogo termine com o jogador tentando retirar uma bola de uma urna vazia?

6. (1,5 pontos)

Considere o prisma mostrado em perspectiva na figura abaixo.



Sabemos que as bases $ABCDE$ e $FGHIJ$ são pentágonos regulares de lados a e b , respectivamente. Sabemos que as faces $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, $DEJI$ e $EAFJ$ são trapézios isósceles congruentes uns aos outros. Sabemos que os comprimentos das arestas AF , BG , CH , DI e EJ são todos iguais a b . Finalmente, sabemos que o ângulo entre a face $FGHIJ$ e a face $ABGF$ é igual ao ângulo entre as faces $ABGF$ e $BCHG$.

Determine os possíveis valores para a razão a/b .

7. **(2,0 pontos)**

Um tabuleiro de xadrez é um quadrado de dimensões 8×8 , dividido em 64 casas quadradas de dimensões 1×1 . Dispomos de um tabuleiro e de 21 peças retangulares de dimensões 3×1 . Desejamos colocar as 21 peças sobre o tabuleiro, cobrindo 63 das casas e deixando uma única casa descoberta.

Determine para quantas e quais casas é possível cobrir as demais 63 deixando aquela casa vazia.