PUC-Rio
Desafio em Matemática
16 de outubro de 2011

Nome: **GABARITO** ____________________ Inscrição: __________
Assinatura: ____________________ Identidade: __________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,0		
4	1,5		
5	1,5		
6	2,0		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
  Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
  Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
  Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
  Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
  Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
  Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
  Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)**

   Jorge quer sortear um número entre 3 e 18. Para isso ele joga quatro dados comuns (com seis faces numeradas de 1 a 6), ignora o menor resultado e soma os outros três. Assim, por exemplo, se os dados saem ⚄⚂⚂⚃ então o número sorteado é $5 + 3 + 4 = 12$.

   Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior ou igual a 16?

   Solução:

   Há 6^4 resultados possíveis para o lançamento de 4 dados. Devemos contar quantos casos correspondem a um número maior ou igual a 16. Vamos considerar cada possibilidade para os três maiores dados.

   $18 = 6 + 6 + 6$: 21 possibilidades. É conveniente separar em casos. Há uma possibilidade de que o quarto dado também seja um 6. Além disso, há 5 outros valores possíveis para o quarto dado e para cada valor há quatro ordens possíveis. Assim temos $1 + 5 \cdot 4 = 21$ possibilidades.

   $17 = 6 + 6 + 5$: 54 possibilidades. Se o quarto dado for um 5 temos 6 ordens possíveis. Se o quarto dado tiver um valor entre 1 e 4 temos 12 ordens possíveis. Assim temos $6 + 4 \cdot 12 = 54$ possibilidades.

   $16 = 6 + 6 + 4$: 42 possibilidades. Se o quarto dado for um 4 temos 6 ordens possíveis. Se o quarto dado tiver um valor entre 1 e 3 temos 12 ordens possíveis. Assim temos $6 + 3 \cdot 12 = 42$ possibilidades.

   $16 = 6 + 5 + 5$: .. possibilidades. Se o quarto dado for um 5 temos 4 ordens possíveis. Se o quarto dado tiver um valor entre 1 e 4 temos 12 ordens possíveis. Assim temos $4 + 4 \cdot 12 = 52$ possibilidades.

   Total: $21 + 54 + 42 + 52 = 169$ possibilidades.

   Assim, a probabilidade pedida é igual a $169/6^4$.

2. **(1,0 pontos)**

   Encontre todas as soluções inteiras da desigualdade abaixo:

$$2 < 3x^2y - 3xy^2 + y^3 < 20.$$

   Solução:

   Temos $3x^2y - 3xy^2 + y^3 = x^3 - (x - y)^3$. Fazendo a substituição $z = x - y$ queremos encontrar as soluções inteiras de $2 < x^3 - z^3 < 20$. Em outras palavras, $x^3 > z^3$ são cubos de inteiros a uma distância entre 2 e 20. Ora, os cubos de inteiros são

$$\ldots, -64, -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, 64, \ldots;$$

   cubos maiores do que 27 ou menores do que -27 estão a uma distância maior do que 20 mesmo de seus vizinhos imediatos logo não nos interessam:

$$x \geq 4 \quad \to \quad x^3-(x-1)^3 = 3x^2-3x+1 = 3x(x-1)+1 \geq 3\cdot4\cdot3+1 = 37 > 20.$$

   Assim os pares (x^3, z^3) válidos são

$$(-8, -27), (-1, -8), (0, -8), (1, -8), (8, -8), (8, -1), (8, 0), (8, 1), (27, 8)$$

   que correspondem aos seguintes pares (x, y):

$$(-2, 1), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1).$$

3. **(1,0 pontos)**

Seja

$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-2}.$$

Seja $x_0 = 2$ e defina os demais valores de x_n pela recorrência $x_{n+1} = g(x_n)$. Assim, por exemplo,

$$x_1 = \frac{2^2+1}{2\cdot 2-2} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}{2\cdot\frac{5}{2}-2} = \frac{29}{12}.$$

Sejam a e b inteiros positivos primos entre si com

$$x_{2011} = \frac{a}{b}.$$

Encontre o último algarismo da representação decimal de a e de b.

Solução:

Defina $a_0 = 2$, $b_0 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2, \quad b_{n+1} = 2b_n(a_n - b_n).$$

Assim $a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $a_2 = 29$, $b_2 = 12$. Temos $x_0 = a_0/b_0$, $x_1 = a_1/b_1$ e $x_2 = a_2/b_2$. Demonstramos por indução que $x_n = a_n/b_n$ para todo n: supondo $x_n = a_n/b_n$ temos

$$x_{n+1} = \frac{x_n^1+1}{2x_n-2} = \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2+1}{2\left(\frac{a_n}{b_n}\right)-2} = \frac{a_n^2+b_n^2}{2b_n(a_n-b_n)} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Demonstramos agora que para $n > 0$ temos que a_n é ímpar e b_n é par. De fato, esta observação vale para $n = 1$ e $n = 2$. Novamente por indução, $b_{n+1} = 2b_n(a_n - b_n)$ é par e $a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$ é a soma de um ímpar com um par e portanto é ímpar.

Temos que $\mathrm{mdc}(a_0, b_0) = \mathrm{mdc}(a_1, b_1) = \mathrm{mdc}(a_2, b_2) = 1$. Demonstramos por indução que $\mathrm{mdc}(a_n, b_n) = 1$ para todo n: basta mostrar que

$$\mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, 2) = \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, b_n) = \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, a_n-b_n) = 1.$$

O primeiro segue de $a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$ ser ímpar. O segundo segue de $\mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, b_n) = \mathrm{mdc}(a_n^2, b_n) = 1$. O terceiro segue de

$$\begin{aligned} \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, a_n-b_n) &\le \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, (a_n+b_n)(a_n-b_n)) = \\ &= \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, a_n^2-b_n^2) = \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, 2b_n^2) = \\ &= \mathrm{mdc}(a_n^2+b_n^2, b_n^2) = \mathrm{mdc}(a_n^2, b_n^2) = 1. \end{aligned}$$

Desejamos portanto encontrar o último algarismo de a_{2011} e de b_{2011}. Trabalhando com congruências módulo 10 temos

$$\begin{aligned} a_2 \equiv 9 \pmod{10}, &\quad b_2 \equiv 2 \pmod{10}, \\ a_3 \equiv 9^2 + 2^2 \equiv 5 \pmod{10}, &\quad b_3 \equiv 2 \cdot 2(9-2) \equiv 8 \pmod{10}, \\ a_4 \equiv 5^2 + 8^2 \equiv 9 \pmod{10}, &\quad b_4 \equiv 2 \cdot 8(5-8) \equiv 2 \pmod{10}, \\ a_5 \equiv 9^2 + 2^2 \equiv 5 \pmod{10}, &\quad b_5 \equiv 2 \cdot 2(9-2) \equiv 8 \pmod{10}, \end{aligned}$$

e verificamos (indução) que para n par, $n \geq 2$, temos $a_n \equiv 9 \pmod{10}$, $b_n \equiv 2 \pmod{10}$ e para n ímpar, $n > 2$, temos $a_n \equiv 5 \pmod{10}$, $b_n \equiv 8 \pmod{10}$. Assim o último algarismo de $a = a_{2011}$ é igual a 5 e o último algarismo de $b = b_{2011}$ é igual a 8.

4. **(1,5 pontos)**

Determine todos os polinômios $P(n)$, com coeficientes inteiros não negativos, tais que, para todo inteiro positivo n,

$$n^{P(n)} \leq (P(n))^n.$$

Solução:

Vamos usar o seguinte resultado (damos uma demonstração no final).

Lema: Se $k \neq 3$ é inteiro não negativo então $3^k > k^3$.

Pelo enunciado devemos ter $3^{P(3)} \leq (P(3))^3$. Assim pelo lema devemos ter $P(3) = 3$.

Se P tiver grau $d \geq 2$ então $P(3) \geq 3^d > 3$. Deduzimos assim que $P(n) = an + b$. Os únicos casos que satisfazem $P(3) = 3$ são $a = b = 1$ e $a = 0$, $b = 3$. No primeiro caso temos $P(n) = n$ que trivialmente satisfaz a condição do enunciado. O segundo caso ($P(n)$ constante igual a 3) corresponde ao lema. Assim os polinômios que satisfazem as condições do enunciado são

$$P_0(n) = 3, \qquad P_1(n) = n.$$

Demonstração do lema: Os casos $k = 0, 1, 2$ são facilmente verificados diretamente, assim como os casos $k = 4$ ($4^3 = 64 < 3^4 = 81$) e $k = 5$ ($5^3 = 125 < 3^5 = 243$). Demonstraremos por indução que a desigualdade vale para todo $k \geq 5$. De fato, suponha $k > 3$ e $k^3 < 3^k$. Temos

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 = k^3 \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 &= k^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3 \\
&< k^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = k^3 \cdot \frac{64}{27} \\
&< 3k^3 < 3 \cdot 3^k = 3^{k+1},
\end{aligned}$$

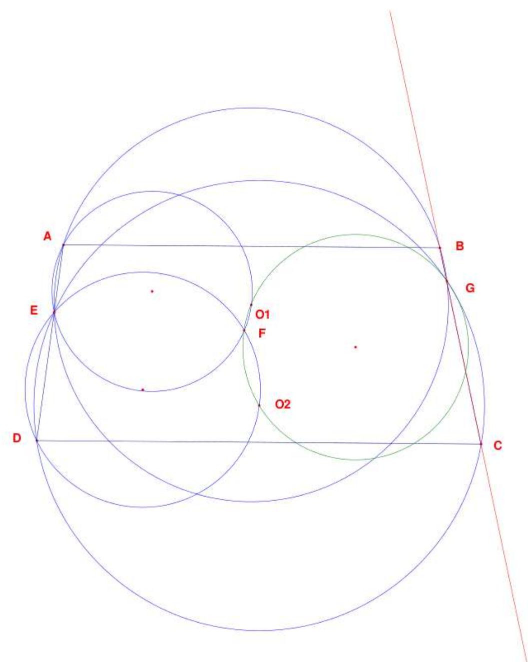
o que completa a demonstração do lema.

5. **(1,5 pontos)**

Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD. Seja E um ponto do lado AD. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ABE e CDE respectivamente. Os circuncírculos dos triângulos O_1AE e O_2DE se intersectam novamente em $F \neq E$. Se Γ_1 e Γ_2 são os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE respectivamente, prove que a reta BC, Γ_1, Γ_2 e o circuncírculo de O_1O_2F são concorrentes.

Solução:

Vejamos uma figura para o problema.



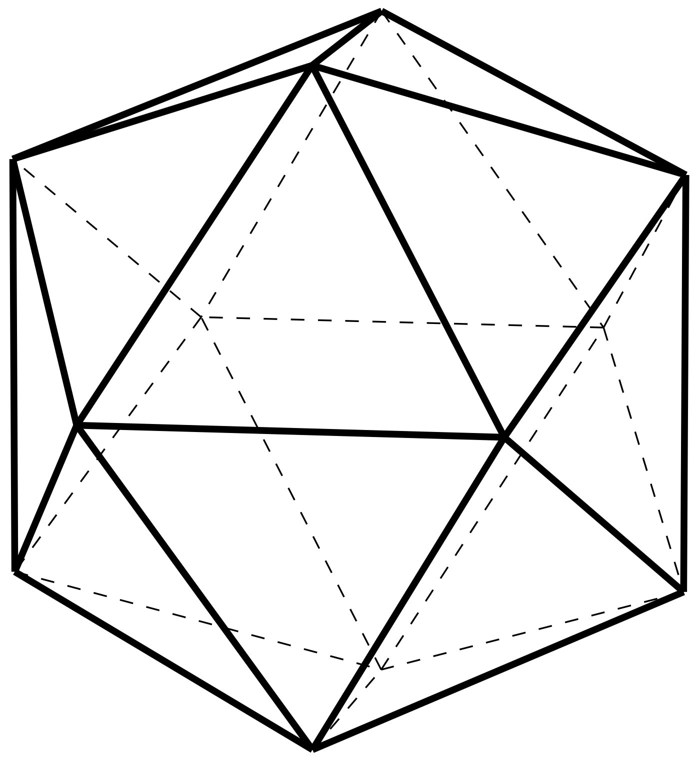
Aqui G é por definição o ponto de interseção de Γ_1 e Γ_2 diferente de E. Vamos inicialmente provar que G pertence à reta BC. O quadrilátero $ABGE$ é inscritível donde $\widehat{BGE} = \pi - \widehat{EAB}$. Analogamente para o quadrilátero $EGCD$ temos $\widehat{EGC} = \pi - \widehat{CDE}$. Assim

$\widehat{BGE} + \widehat{EGC} = 2\pi - \widehat{EAB} - \widehat{CDE} = 2\pi - \widehat{CAB} - \widehat{CDA} = \pi$ donde B, G e C são colineares.

Queremos agora provar que os quatro pontos O_1, O_2, F e G são concíclicos. Observe inicialmente que $\widehat{O_1GO_2} = \widehat{O_2EO_1}$. Por outro lado $\widehat{O_2FO_1} + \widehat{O_1FE} + \widehat{EFO_2} = 2\pi$. Mas $\widehat{O_1FE} = \pi - \widehat{EAO_1}$ e $\widehat{EFO_2} = \pi - \widehat{O_2DE}$ (pois O_1FEA e $DEFO_2$ são inscritíveis). Assim temos $\widehat{O_2FO_1} = \widehat{EAO_1} + \widehat{O_2DE}$. Por outro lado, $\widehat{EAO_1} = \widehat{O_1EA}$ e $\widehat{O_2DE} = \widehat{DEO_2}$ (pois os triângulos AEO_1 e EDO_2 são isósceles) donde $\widehat{O_2FO_1} = \widehat{O_1EA} + \widehat{DEO_2} = \pi - \widehat{O_2EO_1}$. Assim, finalmente, $\widehat{O_2FO_1} + \widehat{O_1GO_2} = \pi$, provando que O_1, O_2, F e G são concíclicos e completando a solução.

6. **(2,0 pontos)**

Considere um icosaedro regular de centro O e aresta ℓ.



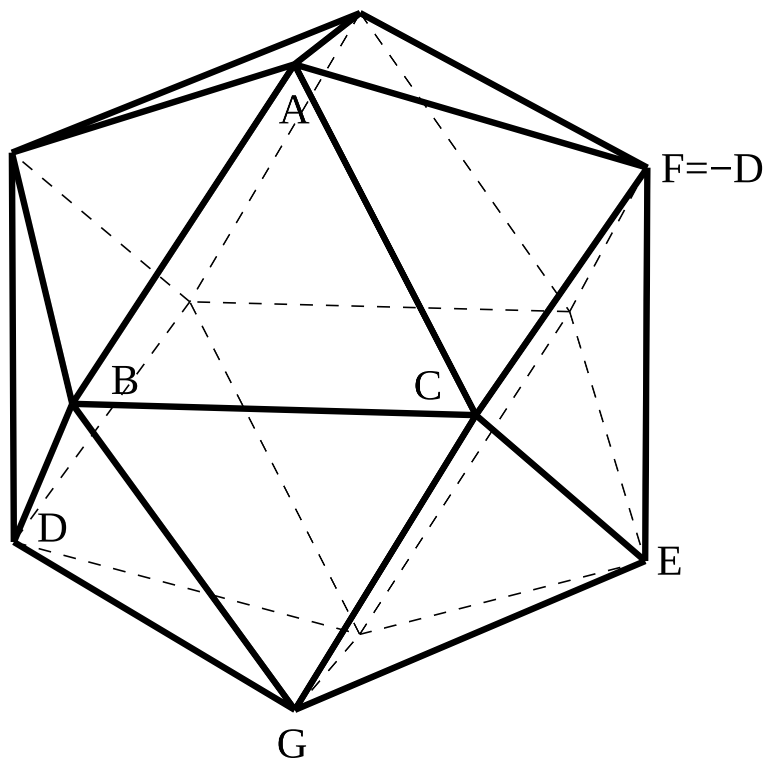
Para cada três vértices A, B e C do icosaedro (distintos dois a dois) seja $P_{A,B,C}$ o plano definido por A, B e C e seja $d_{A,B,C} \geq 0$ a distância entre O e $P_{A,B,C}$.

(a) Quais são os valores distintos que $d_{A,B,C}$ assume?

(b) Para cada valor de $d_{A,B,C}$, quantos planos distintos $P_{A,B,C}$ existem?

Solução:

Podemos sem perda de generalidade supor que $O = 0$, ou seja, que o centro do icosaedro é a origem de $\mathbb{R}^3$. Assim, se A é um vértice seu antípoda é $-A$. Usaremos os nomes de pontos indicados na figura abaixo.

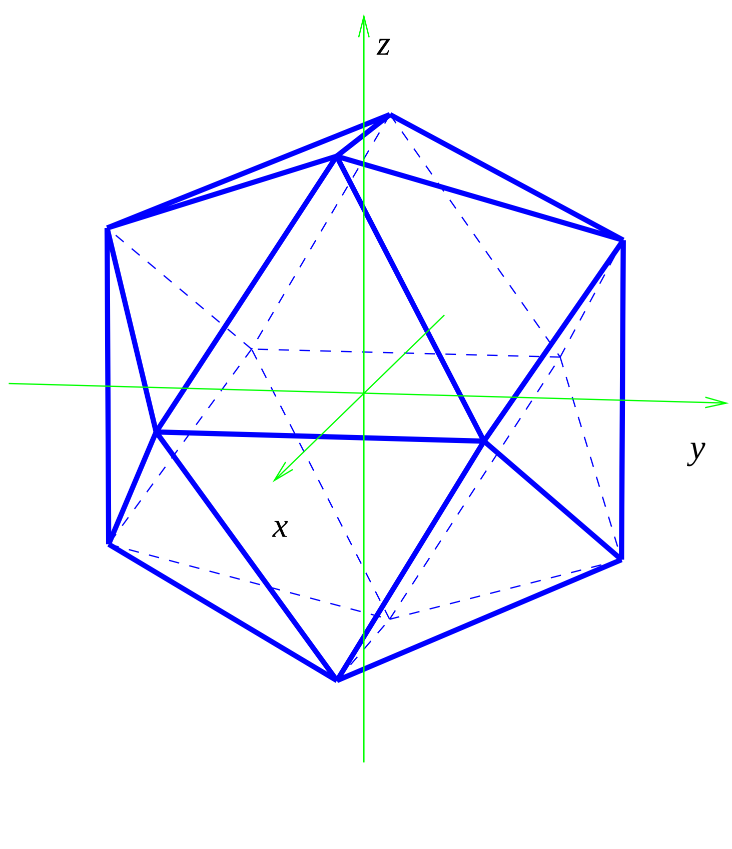


A menos de rotação, há quatro tipos de planos a serem considerados. O plano ABC (tipo I) é definido por uma face do icosaedro. O plano BCF (tipo II) passa por cinco vértices do icosaedro: os vizinhos do vértice A, que formam um pentágono regular (os outros dois vértices são $-E$ e $-G$); este plano é ortogonal ao segmento OA. O plano ADE (tipo III) é paralelo à face BCG e passa por três vértices. Finalmente, o plano ADF (tipo IV) passa por O (pois D e $F = -D$ são antípodas) e por $-A$, o antípoda de A; ele contem portanto quatro vértices do icosaedro.

Vamos primeiramente demonstrar que estes são os únicos tipos de planos (ou seja, que todo plano contendo pelo menos três vértices pode ser obtido a partir de um dos quatro exemplos acima por uma rotação do icosaedro levando vértices em vértices). Observe inicialmente que se o plano contiver dois vértices antípodas (digamos D e F) ele forçosamente conterá (pelo menos) um vizinho de um destes dois vértices (pois todo vértice distinto de D e F é vizinho de um dos dois). Assim (a menos de uma rotação) podemos supor que este seja o plano ADF, de tipo IV.

Suponha agora que nosso plano contenha dois vértices vizinhos (digamos A e B). Já vimos que se ele contiver $-A$ ou $-B$ ele é de tipo IV. Além de $\pm A, \pm B$ temos 8 vértices: C e $-E$ são vizinhos comuns a A e B e definem planos de tipo I; D, F, G e $-G$ são vizinhos de um mas não do outro e definem planos de tipo II; E e $-C$ não são nem vizinhos nem antípodas de A ou B e definem planos de tipo II. Suponha finalmente que nosso plano contenha dois vértices nem vizinhos nem antípodas, digamos A e D. Há os antípodas de A e D ($-A$ e $-D$) que definem planos de tipo IV; há dois vizinhos comuns (B e $-E$) que definem planos de tipo II; há quatro vértices que são vizinhos de um ou outro mas não dos dois e que não são antípodas (C, G, $-C$ e $-G$) que definem planos de tipo II; finalmente, há dois vértices (E e $-B$) que não são nem vizinhos nem antípodas de nenhum dos dois pontos iniciais (são os antípodas dos vizinhos comuns) que definem planos de tipo III.

Para calcular as distâncias é conveniente introduzir coordenadas. Passe os eixos coordenados por pontos médios de arestas como na figura abaixo.



Seja $\phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618$. Temos

$$\begin{aligned} A &= \frac{\ell}{2}(1,0,\phi), & G &= \frac{\ell}{2}(1,0,-\phi),\\ C &= \frac{\ell}{2}(\phi,1,0), & B &= \frac{\ell}{2}(\phi,-1,0),\\ F &= \frac{\ell}{2}(0,\phi,1), & E &= \frac{\ell}{2}(0,\phi,-1). \end{aligned}$$

Assim o plano ACF (tipo I) tem equação

$$x+y+z = \frac{\ell(1+\phi)}{2} \qquad \to \qquad d_{ACF} = \frac{\ell(1+\phi)}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,\ell.$$

O plano BCF (tipo II) tem equação

$$x+\phi z = \frac{\ell\phi}{2} \qquad \to \qquad d_{BCF} = \frac{\ell\phi}{2\sqrt{1+\phi^2}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}\,\ell.$$

Finalmente, o plano $AG(-B)$ (tipo III) tem equação

$$x+(1+\phi)y = \frac{\ell}{2} \qquad \to \qquad d_{AG(-B)} = \frac{\ell}{2\sqrt{1+(1+\phi)^2}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{12}\,\ell.$$

Temos 20 planos de tipo I (as faces), 12 planos de tipo II (correspondentes aos vértices), 20 planos de tipo III (paralelos às faces) e 15 planos de tipo IV (pares de arestas antípodas).

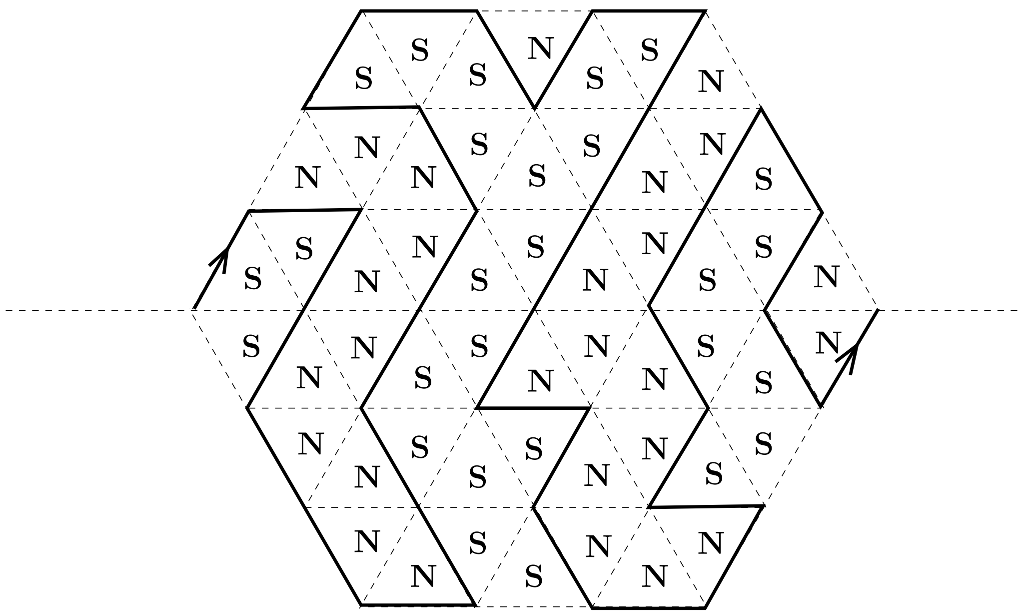
Podemos verificar esta contagem. Temos $\binom{12}{3} = 220$ triplas de vértices. Cada plano de tipo I ou de tipo III é contado uma única vez; planos de tipo II são contados $\binom{5}{3} = 10$ vezes e planos de tipo IV são contados $\binom{4}{3} = 4$ vezes cada. Devemos portanto ter

$$20 + 10\cdot 12 + 20 + 4\cdot 15 = 220,$$

o que é correto.

7. **(2,0 pontos)**

Considere um hexágono regular de lado k decomposto em triângulos equiláteros de lado 1. Traçamos uma poligonal ao longo dos lados dos triângulos. A poligonal começa no vértice oeste do hexágono e termina no vértice leste, passando exatamente uma vez por cada ponto que é vértice de algum triângulo.



Cada triângulo agora é etiquetado **N** ou **S** conforme seja possível a partir dele sair do hexágono para norte ou para o sul, respectivamente, sem cruzar a poligonal (os três lados de cima contam como norte e os três de baixo como sul). Assim, se andarmos ao longo da poligonal, veremos à nossa esquerda triângulos etiquetados com **N** e à nossa direita triângulos etiquetados com **S** .

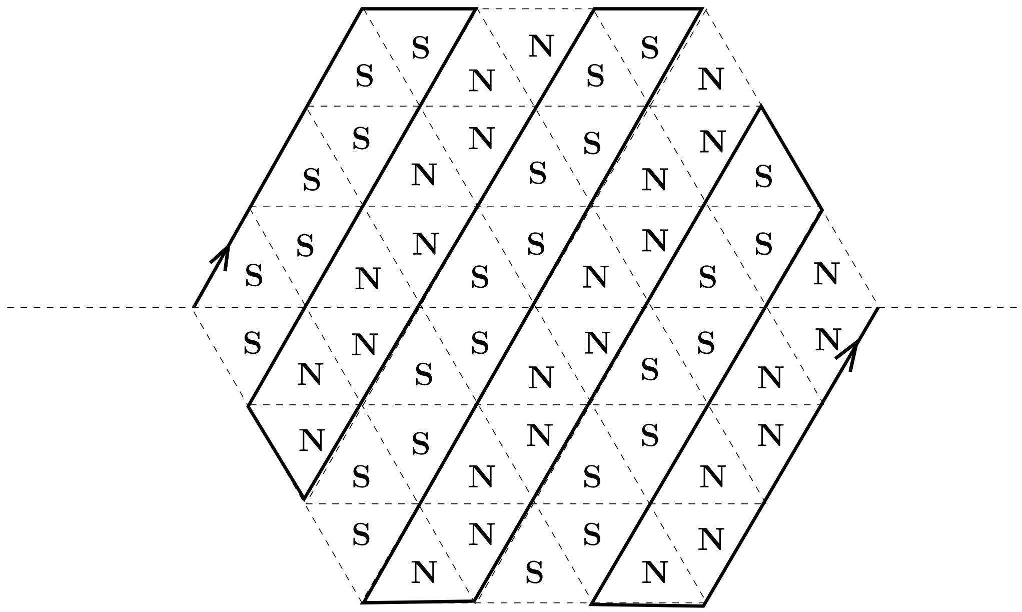
Finalmente, contamos quantos triângulos foram etiquetados com **N** e chamamos a resposta de n. No exemplo da figura, temos $k = 3$ e $n = 27$.

Para cada inteiro positivo k, determine todos os possíveis valores de n.

Solução:

Afirmamos que para cada valor de k o único valor possível de n é $n = 3k^2$.

Observe inicialmente que para todo k a construção é possível (para algum valor de n): basta, por exemplo, varrer o hexágono como na figura abaixo.



Observe ainda que o número total de vértices de triângulos é $3k^2 + 3k + 1$. De fato, para passar de um hexágono de lado $k - 1$ para um hexágono de lado k acrescentamos uma moldura com $6k$ pontos. Assim o número de vértices é

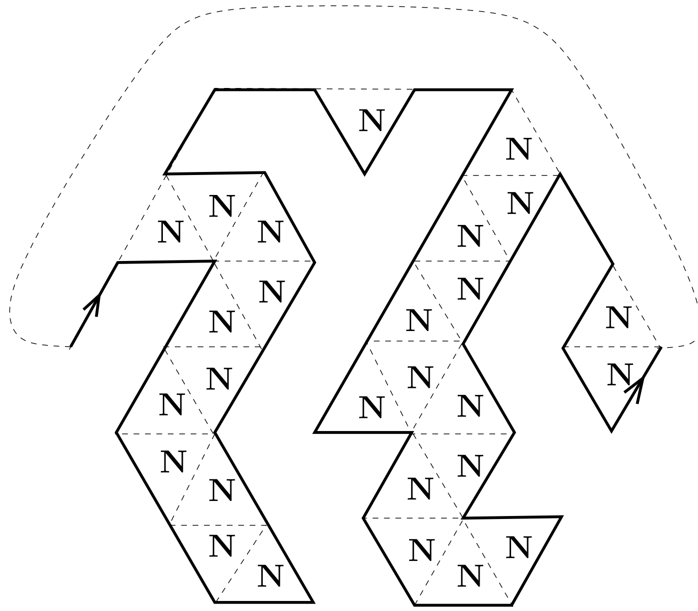
$$1 + 6(1 + 2 + \cdots + k) = 1 + 3k(k + 1) = 3k^2 + 3k + 1.$$

O caminho que passa por todos os vértices tem portanto comprimento $3k^2 + 3k$.

Considere agora uma configuração qualquer consistente com o enunciado: queremos demonstrar que $n = 3k^2$. Apague as linhas separando triângulos **S** uns dos outros e do exterior do hexágono e curve a reta que separa norte de sul para fechar pelo lado norte do hexágono conforme a figura abaixo.

Aplicamos agora a fórmula de Euler $V - A + F = 2$ para esta divisão do plano (ou da esfera) em regiões.

Os vértices são os vértices da configuração original: $V = 3k^2 + 3k + 1$. O número de faces é $F = n + 2$: os n triângulos com etiquetas **N** mais uma região ao norte (uma barra ao longo dos três lados de cima do hexágono) e



uma região complicada ao sul (a união dos triângulos **S** e de quase todo o lado de fora do hexágono).

Resta-nos contar as arestas. Vamos inicialmente contar as arestas em dobro e depois dividir por dois. Cada triângulo **N** contribui com três arestas. A região ao norte contribui com $3k$ arestas curtas (ao longo dos lados do hexágono) e uma aresta comprida. A região ao sul contribui com $3k^2 + 3k$ arestas curtas e uma comprida. Assim

$$2A = 3n + (3k + 1) + (3k^2 + 3k + 1) = 3k^2 + 6k + 3n + 2.$$

Assim

$$(3k^2 + 3k + 1) - \frac{3k^2 + 6k + 3n + 2}{2} + (n + 2) = 2.$$

Simplificando temos $n = 3k^2$, como queríamos.