PUC-Rio

Desafio em Matemática

16 de outubro de 2011

Nome:______________________________ Inscrição:__________

Assinatura:__________________________ Identidade:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,0		
4	1,5		
5	1,5		
6	2,0		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular completamente desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- A prova pode ser resolvida a lápis comum, caneta azul ou caneta preta.
  Use lápis ou canetas de outras cores apenas para desenhos ou diagramas.
  Você tem o direito de usar régua, compasso, esquadro e transferidor.
  Você pode usar borracha.
- Não destaque as folhas da prova.
  Caso você precise de mais rascunho, peça ao fiscal.
  Ele grampeará folhas em branco ao final da sua prova.
  Todas as folhas utilizadas devem ser grampeadas e entregues.
  Suas anotações no rascunho poderão ser usadas a seu favor.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)**

   Jorge quer sortear um número entre 3 e 18. Para isso ele joga quatro dados comuns (com seis faces numeradas de 1 a 6), ignora o menor resultado e soma os outros três. Assim, por exemplo, se os dados saem ⚄⚂⚂⚃ então o número sorteado é $5 + 3 + 4 = 12$.

   Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior ou igual a 16?

2. **(1,0 pontos)**

   Encontre todas as soluções inteiras da desigualdade abaixo:

$$2 < 3x^2y - 3xy^2 + y^3 < 20.$$

3. **(1,0 pontos)**

Seja
$$g(x) = \frac{x^2+1}{2x-2}.$$
Seja $x_0 = 2$ e defina os demais valores de x_n pela recorrência $x_{n+1} = g(x_n)$. Assim, por exemplo,
$$x_1 = \frac{2^2+1}{2\cdot 2-2} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1}{2\cdot\frac{5}{2}-2} = \frac{29}{12}.$$
Sejam a e b inteiros positivos primos entre si com
$$x_{2011} = \frac{a}{b}.$$
Encontre o último algarismo da representação decimal de a e de b.

4. **(1,5 pontos)**

Determine todos os polinômios $P(n)$, com coeficientes inteiros não negativos, tais que, para todo inteiro positivo n,

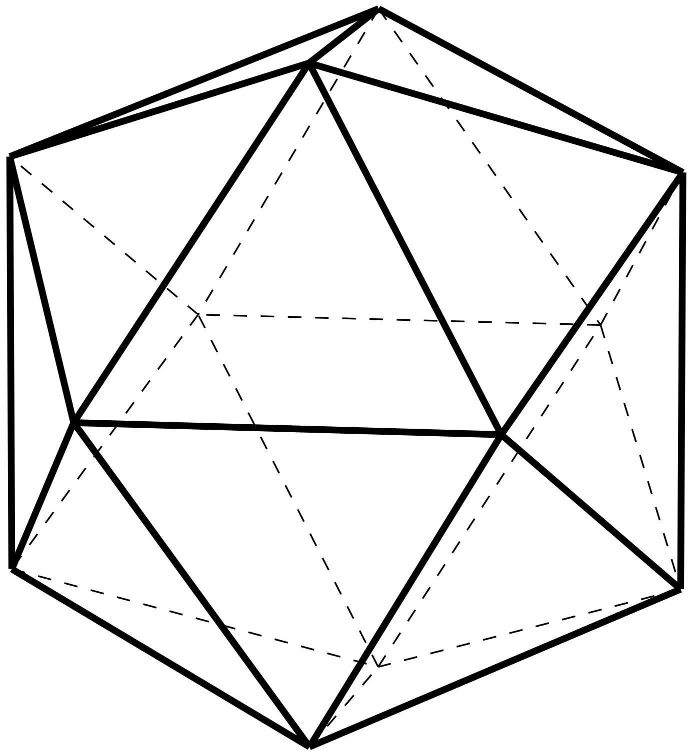
$$n^{P(n)} \leq (P(n))^n.$$

5. **(1,5 pontos)**

   Seja $ABCD$ um trapézio, com AB paralelo a CD. Seja E um ponto do lado AD. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos ABE e CDE respectivamente. Os circuncírculos dos triângulos O_1AE e O_2DE se intersectam novamente em $F \neq E$. Se Γ_1 e Γ_2 são os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE respectivamente, prove que a reta BC, Γ_1, Γ_2 e o circuncírculo de O_1O_2F são concorrentes.

6. **(2,0 pontos)**

Considere um icosaedro regular de centro O e aresta ℓ.



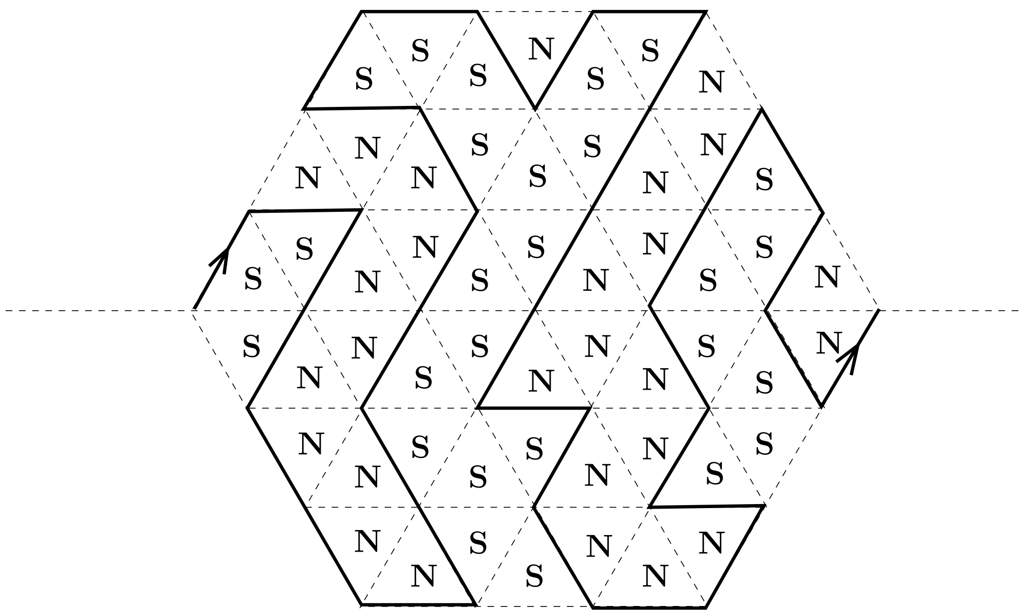
Para cada três vértices A, B e C do icosaedro (distintos dois a dois) seja $P_{A,B,C}$ o plano definido por A, B e C e seja $d_{A,B,C} \geq 0$ a distância entre O e $P_{A,B,C}$.

(a) Quais são os valores distintos que $d_{A,B,C}$ assume?

(b) Para cada valor de $d_{A,B,C}$, quantos planos distintos $P_{A,B,C}$ existem?

7. **(2,0 pontos)**

Considere um hexágono regular de lado k decomposto em triângulos equiláteros de lado 1. Traçamos uma poligonal ao longo dos lados dos triângulos. A poligonal começa no vértice oeste do hexágono e termina no vértice leste, passando exatamente uma vez por cada ponto que é vértice de algum triângulo.



Cada triângulo agora é etiquetado **N** ou **S** conforme seja possível a partir dele sair do hexágono para norte ou para o sul, respectivamente, sem cruzar a poligonal (os três lados de cima contam como norte e os três de baixo como sul). Assim, se andarmos ao longo da poligonal, veremos à nossa esquerda triângulos etiquetados com **N** e à nossa direita triângulos etiquetados com **S** .

Finalmente, contamos quantos triângulos foram etiquetados com **N** e chamamos a resposta de n. No exemplo da figura, temos $k = 3$ e $n = 27$.

Para cada inteiro positivo k, determine todos os possíveis valores de n.