PUC-Rio

Desafio em Matemática

23 de outubro de 2010

Nome: **GABARITO** ______________________ Inscrição:__________

Assinatura:______________________________ Identidade:__________

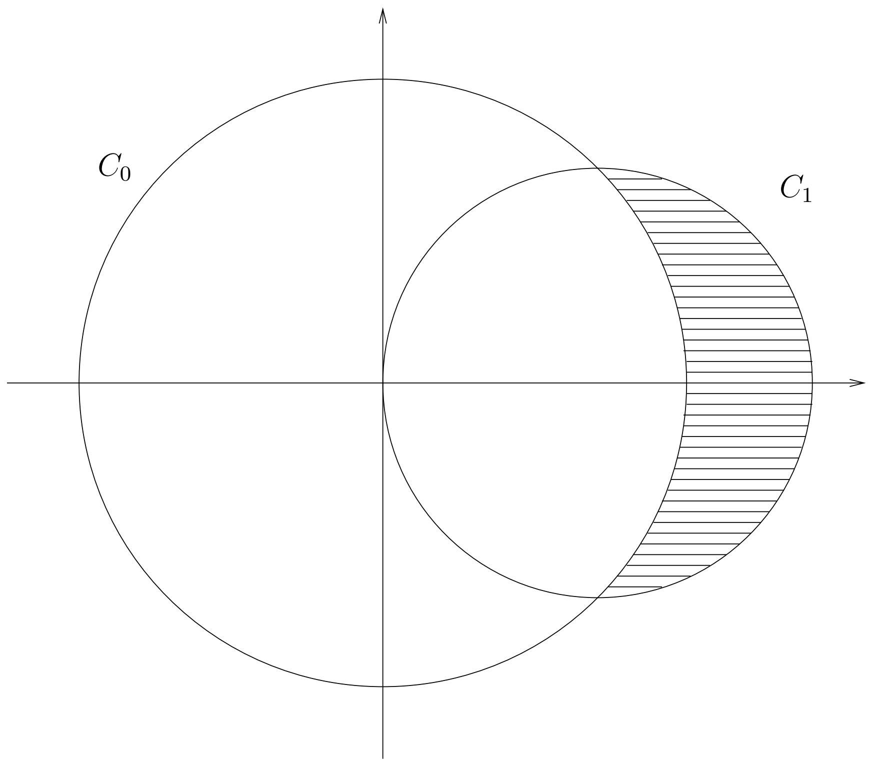
| Questão | Valor | Nota | Revisão |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,0 | | |
| 2 | 1,0 | | |
| 3 | 1,0 | | |
| 4 | 1,5 | | |
| 5 | 1,5 | | |
| 6 | 2,0 | | |
| 7 | 2,0 | | |
| Nota final | 10,0 | | |

## Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1,0 pontos)**

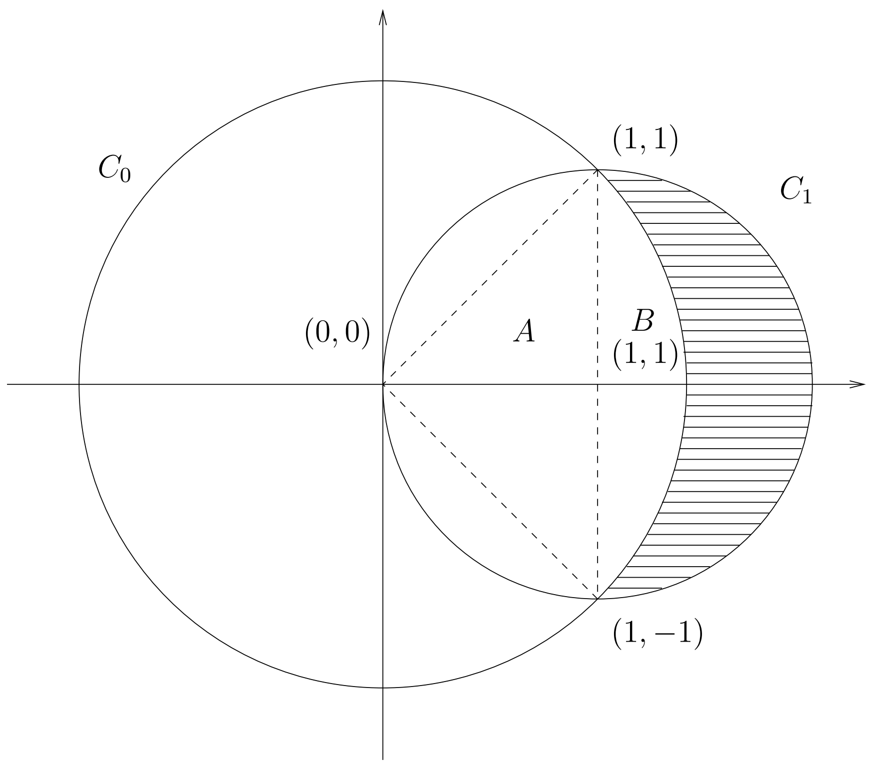
   Na figura abaixo, o círculo maior $C_0$ tem centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2}$ e o círculo menor $C_1$ tem centro $(1,0)$ e raio 1.




   Calcule a área da região dentro de $C_1$ e fora de $C_0$.

**Solução:**

Chamemos a região cuja área queremos calcular de $X$. Note que os pontos de interseção entre os círculos são $(1,1)$ e $(1,-1)$. Trace os segmentos ligando $(0,0)$ a $(1,1)$, $(0,0)$ a $(1,-1)$ e $(1,1)$ a $(1,-1)$, definindo assim o triângulo $A$ e a região $B$ entre a reta $x=1$ e o círculo $C_0$.




A área de $A$ é igual a 1. A área de $A \cup B$ é igual a $\pi/2$ (um quarto do disco de bordo $C_0$). A área de $B \cup X$ é igual a $\pi/2$ (metade do disco de bordo $C_1$). Assim a área de $X$ é igual à área de $A$ e portanto é igual a 1.

2. **(1,0 pontos)**

   Para quantos valores inteiros e positivos de $n$ vale a condição abaixo?

$$n^3 + 33n + 1 < 14n^2$$

   **Solução:**

   Seja $P(x) = x^3 - 14n^2 + 33n + 1 = x(x-3)(x-11) + 1$. Observe que a condição no enunciado é equivalente a $P(n) < 0$.

   Temos $P(-1) < 0 < P(0)$, $P(3) > 0 > P(4)$ e $P(10) < 0 < P(11)$ donde as três raízes reais de $P$ são $x_1 < x_2 < x_3$ com $-1 < x_1 < 0$, $3 < x_2 < 4$ e $10 < x_3 < 11$. Assim $P(x) < 0$ se e somente se $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$. O intervalo $(-\infty, x_1)$ não contem nenhum inteiro positivo. O intervalo $(x_2, x_3)$ inclui os seguintes inteiros positivos: $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

   Assim a condição é satisfeita para 7 valores inteiros e positivos de $n$.

3. **(1,0 pontos)**

   Determine o menor inteiro positivo $N$ para o qual a equação

$$100a + 144b + 150c = N$$

   admite solução com $a$, $b$ e $c$ inteiros. Encontre uma solução para este valor de $N$.

   **Solução:**

   Temos

$$100 \cdot (-1) + 144 \cdot (-17) + 150 \cdot 17 = 2$$

   donde a equação tem solução para $N = 2$. Por outro lado, a equação claramente não admite solução para $N = 1$ pois o lado esquerdo é par.

   Note que $2 = \text{mdc}(100, 144, 150)$. A solução acima pode ser obtida pelo algoritmo de Euclides.

4. **(1,5 pontos)**

   Em Tumbolia há uma curiosa tradição para determinar o dia da Festa dos Crocodilos. Os artesãos fabricam uma urna com o número de bolinhas numeradas igual ao número do ano. Assim, por exemplo, em 2010 a urna tinha 2010 bolinhas numeradas (de 1 a 2010). Começando no dia 1 de janeiro, o Chefe de Cerimônias sacode a urna, tira uma bolinha, anota o número e joga a bolinha de volta na urna. No dia em que sai o primeiro número repetido acontece a Festa dos Crocodilos; se até o dia 31 de dezembro não aparecer nenhum número repetido não há festa naquele ano.

   Qual é o dia mais provável para a Festa dos Crocodilos em 2011?

**Solução:**

Seja $N$ o número de bolinhas. Vamos numerar os dias do ano, com 1 de janeiro sendo o dia 1, 1 de fevereiro o dia 32 e assim por diante.

Supondo que o processo chegue até o dia $k$, já teremos $k-1$ números anotados antes de a bolinha ser sorteada e a probabilidade de que a Festa ocorra no dia $k$ será então $(k-1)/N$ e a probabilidade de que ela *não* ocorra no dia $k$ será $(N-(k-1))/N$.

Assim, a probabilidade (agora sem condições) de que a festa ocorra no dia $k$ é

$$P_k = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-(k-2)) \cdot (k-1)}{N^k}.$$

Assim

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{(N-(k-1)) \cdot k}{N \cdot (k-1)}$$

e portanto

$$\begin{aligned} P_{k+1} > P_k \quad &\Leftrightarrow \quad (N-(k-1)) \cdot k > N \cdot (k-1) \\ &\Leftrightarrow \quad Nk - k^2 + k > Nk - N \\ &\Leftrightarrow \quad k^2 - k - N < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k < \frac{1+\sqrt{1+4N}}{2} \end{aligned}$$

(lembre que $k > 0$). Assim o valor de $P_k$ cresce em função de $k$ até atingir um máximo em

$$\left\lceil \frac{1+\sqrt{1+4N}}{2} \right\rceil$$

e a partir daí decresce.

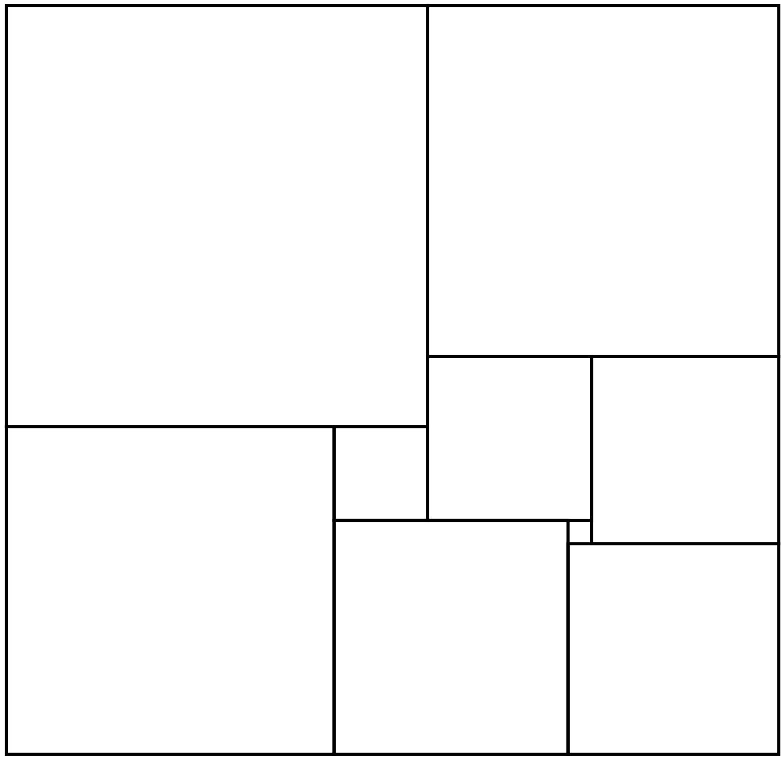
Para $N = 2011$ temos $1 + 4N = 8045$ e $89 < \sqrt{1+4N} < 90$ e $90 < 1 + \sqrt{1+4N} < 91$ e

$$45 < \frac{1+\sqrt{1+4N}}{2} < 46$$

donde $P_{45} < P_{46}$ e $P_{46} > P_{47}$ e o dia mais provável é o dia 46, ou seja, dia 15 de fevereiro.

5. **(1,5 pontos)**

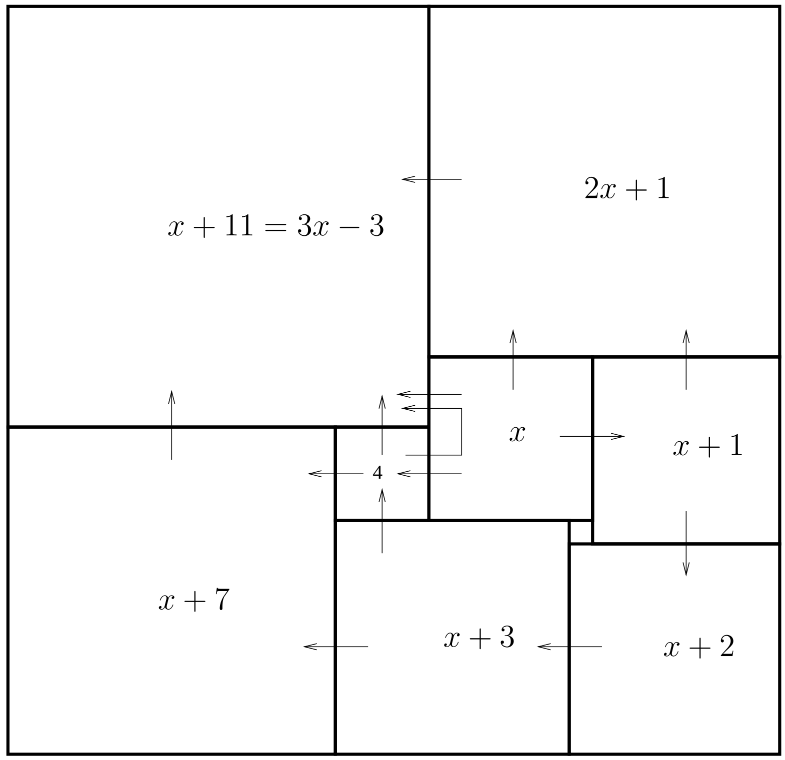
A figura mostra um retângulo decomposto como a união disjunta de 9 quadrados de lados diferentes.



Determine a razão entre os lados do retângulo.

**Solução:**

Suponha sem perda de generalidade que o lado do menor quadrado seja igual a 1. Chamemos de $x$ o lado do quadrado logo acima dele.

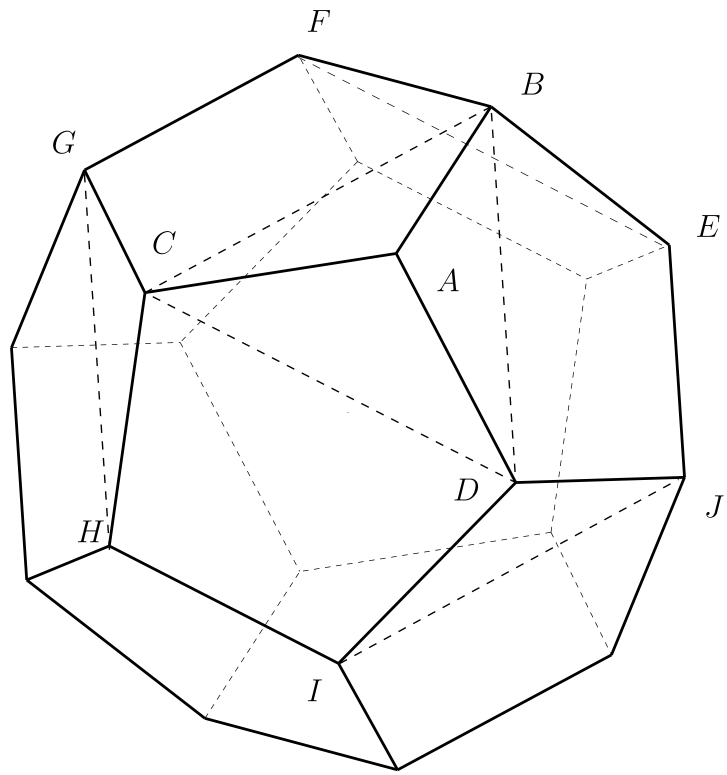



Examinando a figura (e seguindo as setas) podemos escrever em função de $x$ os lados de todos os quadrados. Quando chegamos no quadrado grande temos duas maneiras de calcular seu lado donde deduzimos que $x = 7$.

Assim a altura do retângulo é igual a 32 e a sua largura é igual a 33 e a razão entre os lados é igual a 32/33.

6. **(2,0 pontos)**

Em um dodecaedro regular de aresta 1, considere um vértice arbitrário $A$. Sejam $B$, $C$ e $D$ os vizinhos de $A$ e $E$, $F$, $G$, $H$, $I$ e $J$ os vizinhos de $B$, $C$, $D$ diferentes de $A$. Seja $X$ o sólido convexo de vértices $A$, $B$, $C$ e $D$; seja $Y$ o sólido convexo de vértices $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$ e $J$.

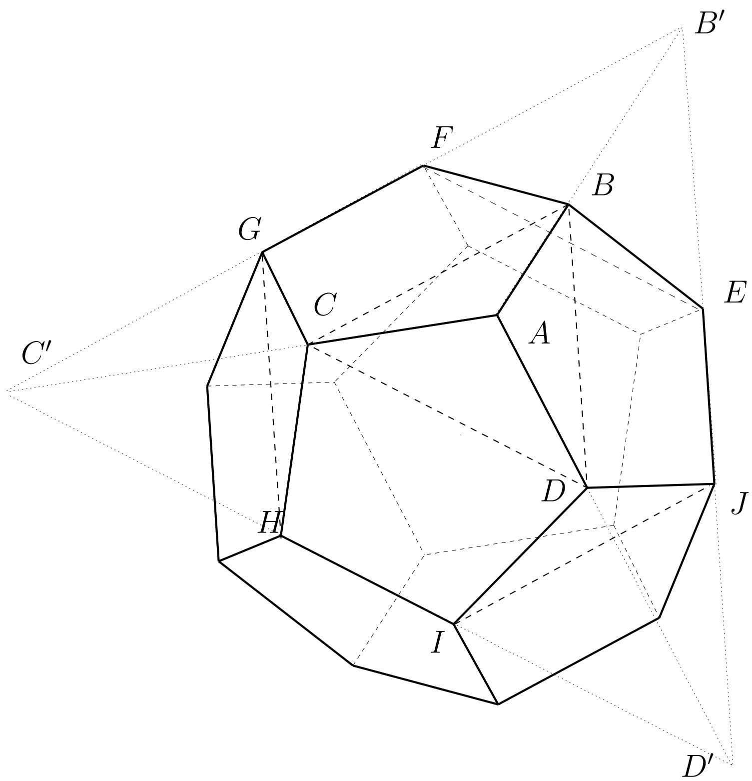



Determine a razão entre o volume de $X$ e o volume de $Y$.

**Primeira Solução:**

Seja
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6.$$

Prolongue os segmentos $AB$, $EJ$ e $FG$ para definir $B'$, $AC$, $FG$ e $HI$ para definir $C'$ e $AD$, $HI$ e $EJ$ para definir $D'$. Seja $X'$ o poliedro convexo de vértices $A$, $B'$, $C'$ e $D'$: $X'$ é semelhante a $X$ com razão de homotetia igual a $\varphi^2$ donde $\mathrm{Vol}(X') = \varphi^6 \,\mathrm{Vol}(X) = (8\varphi + 5)\,\mathrm{Vol}(X)$.




Seja $Z_B$ o poliedro de vértices $B$, $B'$, $E$ e $F$; $Z_C$ o poliedro de vértices $C$, $C'$, $G$ e $H$; $Z_D$ o poliedro de vértices $D$, $D'$, $I$ e $J$. Observe que $Z_B$, $Z_C$ e $Z_D$ são congruentes.

Os poliedros $X$, $Z_B$, $Z_C$ e $Z_D$ são pirâmides de base triângulo equilátero. Seja $h$ a altura de $X$: a altura de $Z_B$ é $\varphi h$. Seja $\ell = \overline{BC}$ o lado da base de $X$. Temos $\overline{B'C'} = \varphi^2 \ell$ e $\overline{FG} = \varphi^{-1}\ell$ donde $\overline{B'F} = \ell$. Assim $\mathrm{Vol}(Z_B) = \varphi\,\mathrm{Vol}(X)$. Mas $\mathrm{Vol}(Y) = \mathrm{Vol}(X') - \mathrm{Vol}(X) - 3\,\mathrm{Vol}(Z_b)$ donde

$$\frac{\mathrm{Vol}(Y)}{\mathrm{Vol}(X)} = \varphi^6 - 1 - 3\varphi = 5\varphi + 4.$$

**Segunda Solução:**

Podemos dar coordenadas para os pontos. Com $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.6$ temos

$$A = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi, \varphi),$$
$$B = \frac{1}{2}(0, \varphi^2, 1), \quad C = \frac{1}{2}(1, 0, \varphi^2), \quad D = \frac{1}{2}(\varphi^2, 1, 0),$$
$$E = \frac{1}{2}(0, \varphi^2, -1), \quad F = \frac{1}{2}(-\varphi, \varphi, \varphi),$$
$$G = \frac{1}{2}(-1, 0, \varphi^2), \quad H = \frac{1}{2}(\varphi, -\varphi, \varphi),$$
$$I = \frac{1}{2}(\varphi^2, 0, -1), \quad J = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi, -\varphi).$$

Sejam $K$ e $L$ os centros de $BCD$ e $EFGHIJ$, respectivamente. Temos

$$K = \frac{1}{6}(1+\varphi^2, 1+\varphi^2, 1+\varphi^2), \quad L = \frac{1}{6}(\varphi, \varphi, \varphi).$$

Assim as alturas de $X$ e $Y$ valem, respectivamente,

$$h_X = \frac{3\varphi - (1+\varphi^2)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\varphi^{-1}, \quad h_Y = \frac{(1+\varphi^2) - \varphi}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

O sólido $X$ é uma pirâmide. Sua base é um triângulo equilátero de lado $\varphi$ e área igual a $\sqrt{3}\varphi^2/4$ e portanto

$$\mathrm{Vol}(X) = \frac{\varphi}{12}.$$

O sólido $Y$ é um prismatóide. Sua bases superior e inferior são $BCD$ e $EFGHIJ$, respectivamente. Vamos calcular o volume de $Y$ usando a fórmula

$$\mathrm{Vol} = \frac{(B_{\mathrm{sup}} + 4B_{\mathrm{med}} + B_{\mathrm{inf}})h}{6}$$

onde $B_{\mathrm{sup}}$, $B_{\mathrm{med}}$ e $B_{\mathrm{inf}}$ são as áreas das bases superior, média e inferior, respectivamente. Já vimos que $B_{\mathrm{sup}} = \sqrt{3}\varphi^2/4$. A base inferior é um hexágono de ângulos internos iguais a 120 graus e lados alternadamente iguais a $\varphi$ e 1 e $B_{\mathrm{inf}} = \sqrt{3}(\varphi^2 + 4\varphi + 1)/4$. A base média é um hexágono do mesmo tipo com lados alternadamente iguais a $\varphi/2$ e $\varphi^2/2$ e $4B_{\mathrm{med}} = \sqrt{3}(\varphi^4 + 4\varphi^3 + \varphi^2)/4$. Assim

$$\mathrm{Vol}(Y) = \frac{(\varphi^2) + (\varphi^4 + 4\varphi^3 + \varphi^2) + (\varphi^2 + 4\varphi + 1)}{24} = \frac{9\varphi + 5}{12}.$$

Assim

$$\frac{\mathrm{Vol}(Y)}{\mathrm{Vol}(X)} = \frac{9\varphi + 5}{\varphi} = 5\varphi + 4.$$

7. **(2,0 pontos)**

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais.

Dizemos que um polinômio $P(x, y, z)$ é *trilegal* se ele satisfizer as seguintes condições:

(i) Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ então $P(a, b, c) \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 \in \mathbb{N}$ e $P(a_0, b_0, c_0) = P(a_1, b_1, c_1)$ então $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ e $c_0 = c_1$.

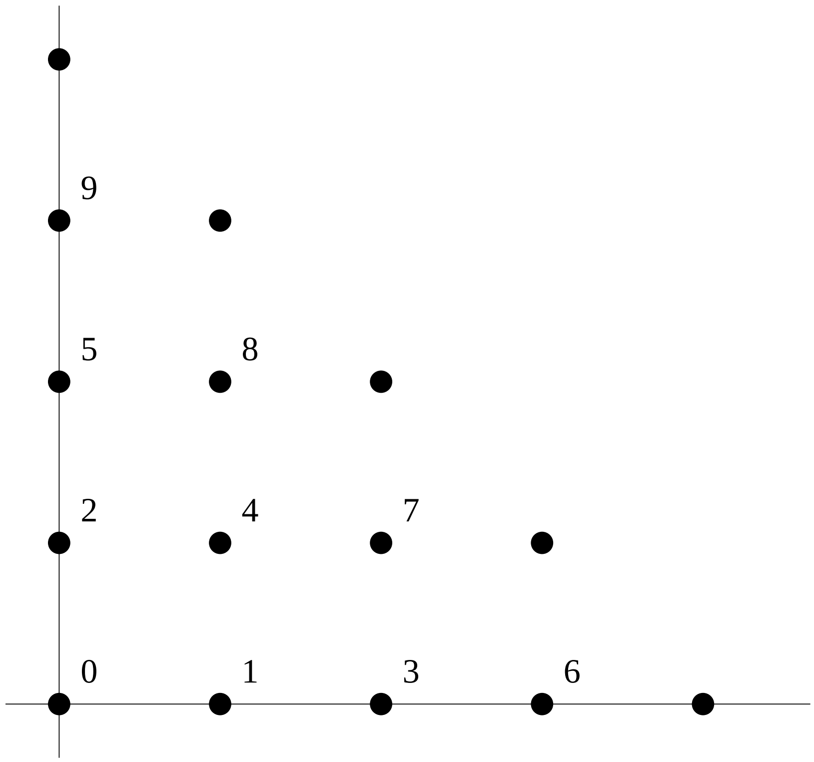
(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $a, b, c \in \mathbb{N}$ com $P(a, b, c) = n$.

Assim, por exemplo, $P(x, y, z) = x^3 + xy + z$ não é trilegal, pois satisfaz as condições (i) e (iii) mas não satisfaz a condição (ii).

Diga se existe algum polinômio trilegal. Se existir, dê exemplo; se não existir, demonstre este fato.

**Solução:**

**SIM**, existem polinômios trilegais. Há vários exemplos deles. Uma maneira de construir um é começar contruindo $P_2(x,y)$ que assuma os valores na figura.




Não é difícil verificar que

$$P_2(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y;$$

agora basta tomar

$$P(x,y,z) = P_2(P_2(x,y),z).$$