PUC-Rio

Desafio em Matemática

15 de outubro de 2009

Nome: **GABARITO** ______________________ Inscrição: ____________

Assinatura: ______________________ Identidade: ____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1,0		
2	1,0		
3	1,5		
4	1,5		
5	1,5		
6	1,5		
7	2,0		
Nota final	10,0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

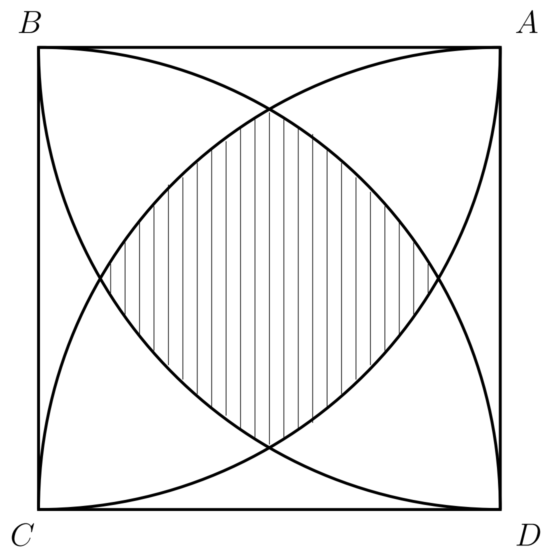
1. **(1,0 pontos)** Quantas raízes reais tem a equação abaixo?

$$x^9 - 5x^3 + 1 = 0$$

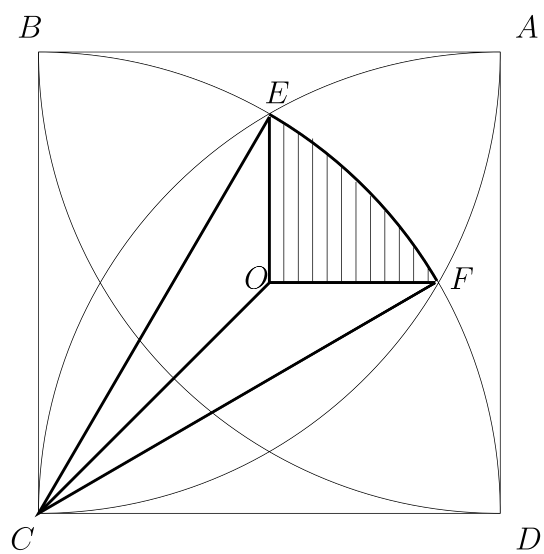
Solução: Considere $P(z) = z^3 - 5z + 1$. Temos $P(-3) = -11$, $P(-2) = 3$, $P(-1) = 5$, $P(0) = 1$, $P(1) = -3$, $P(2) = -1$, $P(3) = 13$. Assim existem $z_1 \in (-3, -2)$, $z_2 \in (0, 1)$ e $z_3 \in (2, 3)$ com $P(z_1) = P(z_2) = P(z_3) = 0$. Como P tem grau 3, estas são as únicas raízes de P e temos $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

A equação do problema é $P(x^3) = 0$ ou $(x^3 - z_1)(x^3 - z_2)(x^3 - z_3) = 0$. Assim ela admite três raízes reais: $z_1^{1/3}$, $z_2^{1/3}$ e $z_3^{1/3}$.

2. **(1,0 pontos)** Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. Trace círculos de raio 1 com centro em cada um dos quatro vértices. Determine a área da região interior aos quatro círculos (indicada na figura).



Solução: Sejam E e F as interseções entre círculos indicadas na figura abaixo. Os triângulos CDE e BCF são equiláteros logo $\widehat{ECF} = \pi/6$. Assim a área da "fatia" ECF é igual a $\pi/12$.



Seja O o centro do quadrado. Os triângulos ECO e CFO têm base $(\sqrt{3}-1)/2$ e altura $1/2$ logo área $(\sqrt{3}-1)/8$ cada. Assim a área da região EOF indicada na figura é $\pi/12 - (\sqrt{3}-1)/4$ e a área pedida é igual a $\pi/3 + 1 - \sqrt{3}$.

3. **(1,5 pontos)** Para n um inteiro positivo, defina

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par}, \\ 2^n(n+1), & \text{ímpar}. \end{cases}$$

Assim, $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 32$, $f(4) = 2$, $f(5) = 192$, $f(6) = 3$ e $f(7) = 1024$.

Mostre que existe um inteiro positivo k tal que $f^k(2010) = 1$ e encontre o menor tal k.

(Notação: $f^2(n) = f(f(n))$, $f^3(n) = f(f(f(n)))$, $f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$.)

Solução: Temos

$$\begin{aligned} f(2010) &= 1005, \\ f^2(2010) &= 2^{1005} \cdot 1006 = 2^{1006} \cdot 503, \\ f^3(2010) &= 2^{1005} \cdot 503, \\ \cdots & \quad \cdots \\ f^{1008}(2010) &= 503, \\ f^{1009}(2010) &= 2^{503} \cdot 504 = 2^{506} \cdot 63, \\ \cdots & \quad \cdots \\ f^{1515}(2010) &= 63, \\ f^{1516}(2010) &= 2^{63} \cdot 64 = 2^{69}, \\ \cdots & \quad \cdots \\ f^{1582}(2010) &= 8, \\ f^{1583}(2010) &= 4, \\ f^{1584}(2010) &= 2, \\ f^{1585}(2010) &= 1. \end{aligned}$$

Assim o menor k tal que $f^k(2010) = 1$ é $k = 1585$.

4. **(1,5 pontos)** Zé Roberto e Humberto disputam um jogo. Eles jogam um dado comum até sair duas vezes consecutivas o mesmo número. Se este número a aparecer repetido for par, ganha Zé Roberto; se for ímpar, ganha Humberto.

   Eles começam a partida: o primeiro número sorteado é 1, o segundo é 4, o terceiro é 2. Qual é, neste momento, a probabilidade de que Zé Roberto ganhe?

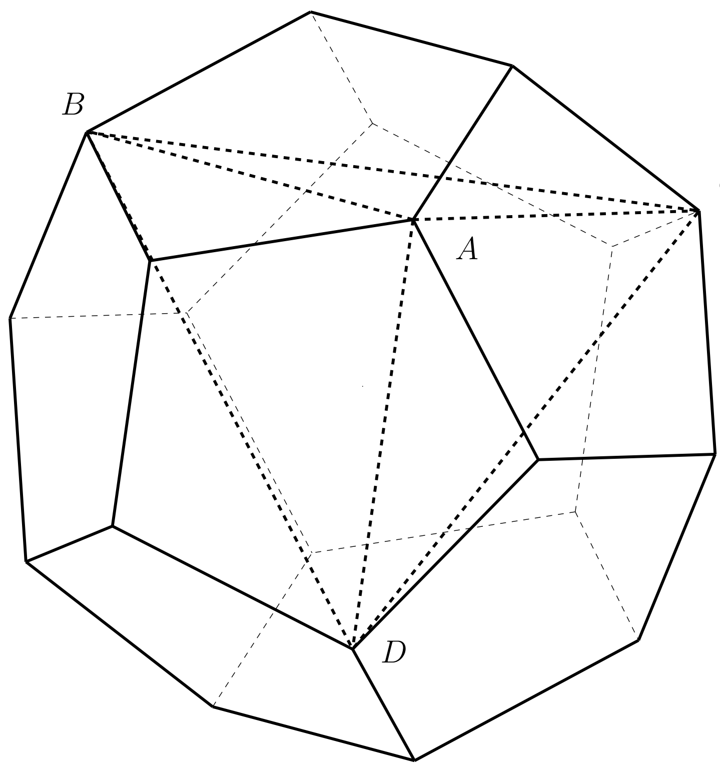
   Solução: Seja P_0 a resposta do problema, i.e., a probabilidade de que Zé Roberto ganhe se o último número sorteado for par. Por simetria, se o último número sorteado for ímpar a probabilidade de que Humberto ganhe será igual a P_0 donde a probabilidade de que Zé Roberto ganhe será $1 - P_0$.

   Se o último número sorteado for par, temos $1/6$ de probabilidade de que Zé Roberto ganhe imediatamente, $1/3$ de probabilidade de que caia outro número par e $1/2$ de probabilidade de que caia um número ímpar. Assim

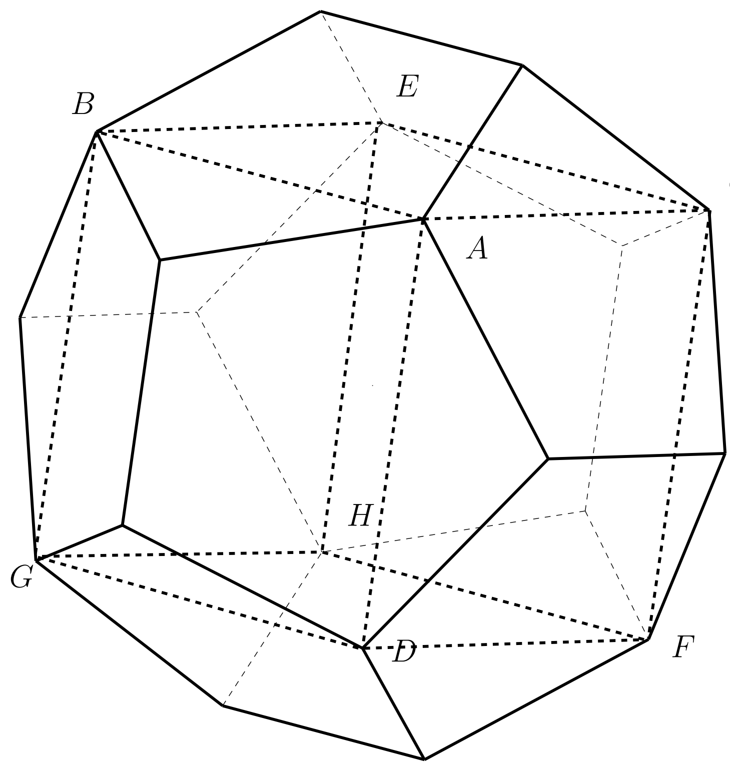
$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{6} + \frac{P_0}{3} + \frac{1 - P_0}{2}, \\
6P_0 &= 1 + 2P_0 + 3 - 3P_0, \\
7P_0 &= 4, \\
P_0 &= \frac{4}{7}.
\end{aligned}
$$

5. **(1,5 pontos)** Em um dodecaedro regular de aresta 1, considere um vértice arbitrário A. A partir de A ande ao longo de uma aresta, dobre à direita no primeiro vértice e marque o segundo vértice encontrado: faça isso das três formas possíveis para obter os vértices B, C e D, conforme a figura.

   Determine o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.



Solução: A partir de B, C e D, ande uma aresta e dobre à esquerda para obter os vértices E, F e G. A partir de E, F e G, ande uma aresta e dobre à direita para obter o vértices H e completar um poliedro que afirmamos ser um cubo.



De fato, todas as 12 arestas têm o mesmo comprimento pois são diagonais de um pentágono regular de lado 1 logo iguais a $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. Além disso, todos os 8 vértices estão sobre uma esfera logo cada face é um quadrilátero inscritível. Assim cada face é quadrada, o que é suficiente para garantir que o poliedro é realmente um cubo.

O volume do cubo é $\varphi^3 = 2+\sqrt{5}$. O tetraedro do enunciado tem um sexto do volume do cubo donde seu volume é igual a $(2+\sqrt{5})/6$.

6. **(1,5 pontos)** Seja $g(n) = 3^n + 2^n - n$. Seja $a_0 = 0$ e defina $a_{n+1} = g(a_n)$. Assim, $a_1 = g(a_0) = g(0) = 3^0 + 2^0 - 0 = 2$ e $a_2 = g(2) = 11$.

   Determine o último algarismo de a_{2010} (escrito em notação decimal).

   Solução: Precisamos determinar o valor de a_n módulo 10, i.e., o resto da divisão de a_n por 10. Um complicador é que o valor de n módulo 10 não determina o valor de 3^n, 2^n ou $g(n)$ módulo 10. Por outro lado, para $n \geq 2$, o valor de n módulo 20 determina sim o valor de $g(n)$ módulo 20. De fato, $3^n \equiv (-1)^n \pmod 4$, $2^n \equiv 0 \pmod 4$ para $n \geq 2$ e

$$3^n \equiv \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 3, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ 4, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ 2, & n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \pmod 5;$$

$$2^n \equiv \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2, & n \equiv 1 \pmod 4, \\ 4, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ 3, & n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases} \pmod 5.$$

   Assim

$$\begin{aligned}
&a_1 \equiv 2 \pmod 4, \\
&a_1 \equiv 2 \pmod 5, \\
&a_2 \equiv 3 \pmod 4, \\
&a_2 \equiv 1 \pmod 5, \\
&a_3 = 3^{a_2} + 2^{a_2} - a_2 \equiv -1 + 0 - 3 \equiv 0 \pmod 4, \\
&a_3 \equiv 2 + 3 - 1 = 4 \pmod 5, \\
&a_4 = 3^{a_3} + 2^{a_3} - a_3 \equiv 1 + 0 - 0 \equiv 1 \pmod 4, \\
&a_4 \equiv 1 + 1 - 4 \equiv 3 \pmod 5, \\
&a_5 = 3^{a_4} + 2^{a_4} - a_4 \equiv 3 + 0 - 1 \equiv 2 \pmod 4, \\
&a_5 \equiv 3 + 2 - 3 \equiv 2 \pmod 5, \\
&a_6 = 3^{a_5} + 2^{a_5} - a_5 \equiv 1 + 0 - 2 \equiv 3 \pmod 4, \\
&a_6 \equiv 4 + 4 - 2 \equiv 1 \pmod 5.
\end{aligned}$$

   Temos $a_5 \equiv a_1 \pmod{20}$ e $a_6 \equiv a_2 \pmod{20}$. Mais geralmente, se $n_1, n_2 \geq 1$, $n_1 \equiv n_2 \pmod 4$ então $a_{n_1} \equiv a_{n_2} \pmod{20}$.

   Como $2010 \equiv 2 \pmod 4$ temos $a_{2010} \equiv a_2 = 11 \pmod{20}$ e portanto o último algarismo é igual a 1.

7. **(2,0 pontos)** Para inteiros não negativos a e b, defina $a \Uparrow b$ por $a \Uparrow 0 = 1$, $a \Uparrow 1 = a$, $a \Uparrow 2 = a^a$ e $a \Uparrow (b+1) = a^{(a \Uparrow b)}$. Assim, por exemplo,

$$2 \Uparrow 4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536.$$

Encontre um inteiro positivo n tal que

$$2 \Uparrow n < 2010 \Uparrow 2010 < 2 \Uparrow (n+1).$$

Justifique sua resposta.

Solução: Demonstraremos por indução as duas seguintes afirmações:

(I) Para todo $n \geq 1$ temos $2 \Uparrow (n+2) < 2010 \Uparrow n$.

(II) Para todo $n \geq 1$ temos $20(2010 \Uparrow n) < 2 \Uparrow (n+3)$.

Segue diretamente destas duas afirmações que a resposta do problema é $n = 2012$.

Note que a afirmação (II) é mais forte do que o que precisamos; ela é formulada assim para que a demonstração por indução funcione.

Demonstração de (I): O caso $n = 1$ é trivial:

$$2 \Uparrow 3 = 16 < 2010 \Uparrow 1 = 2010.$$

Suponha agora a afirmação válida para n e vamos provar que ela é válida para $n+1$. Temos

$$2 \Uparrow (n+3) = 2^{(2 \Uparrow (n+2))} < 2010^{(2 \Uparrow (n+2))} < 2010^{(2010 \Uparrow n)} = 2010 \Uparrow (n+1),$$

completando a demonstração.

Demonstração de (II): O caso $n = 1$ é trivial:

$$20(2010 \Uparrow 1) = 40200 < 2 \Uparrow 4 = 65536.$$

Suponha agora a afirmação válida para n e vamos provar que ela é válida para $n+1$. Temos

$$20(2010 \Uparrow (n+1)) = 20 \cdot 2010^{(2010 \Uparrow n)} < 20 \cdot (2^{11})^{(2010 \Uparrow n)} = 20 \cdot 2^{(11(2010 \Uparrow n))} <$$
$$< 2^{(9(2010 \Uparrow n))} \cdot 2^{(11(2010 \Uparrow n))} = 2^{(20(2010 \Uparrow n))} < 2^{(2 \Uparrow (n+3))} = 2 \Uparrow (n+4),$$

completando a demonstração.