PUC-Rio

Desafio em Matemática

15 de novembro de 2008

Nome:____ Inscrição:____________
Assinatura:____________________________________ Identidade:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1	1.0		
2	1.0		
3	1.0		
4	1.0		
5a	1.0		
5b	1.0		
6a	1.0		
6b	1.0		
7	2.0		
Nota final	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. **(1 ponto)** Seja C o círculo de centro $(0,0)$ e raio 2. Seja T o triângulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{3},3)$ e $(\sqrt{3},-3)$. Calcule a área da região comum a C e T (ou seja, do conjunto de pontos que estão do lado de dentro de C e de T).

2. **(1 ponto)** Encontre um polinômio $P(X)$ tal que $\cos(5t) = P(\cos(t))$ para todo t.

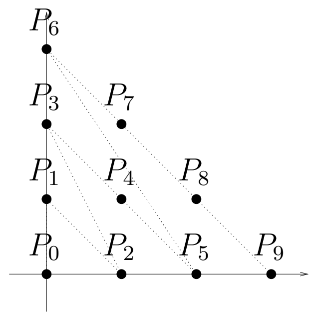
3. **(1 ponto)** Calcule a soma abaixo.

$$\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{5^2-4}+\frac{1}{7^2-4}+\cdots+\frac{1}{2009^2-4}$$

4. **(1 ponto)** Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa; justifique.

   Para todo inteiro positivo k pelo menos um dentre os inteiros $6k-1$, $6k+1$, $6k+5$ e $6k+7$ é primo.

5. Seja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o conjunto dos pontos do plano com coordenadas no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Enumere estes pontos como $P_0, P_1, P_2, \ldots$, listando (x_a, y_a) antes de (x_b, y_b) se $x_a + y_a < x_b + y_b$ ou, caso $x_a + y_a = x_b + y_b$, se $x_a < x_b$. Assim, por exemplo, $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 0)$; a figura indica mais alguns pontos.



(a) **(1 ponto)** Determine as coordenadas de P_{2009}.

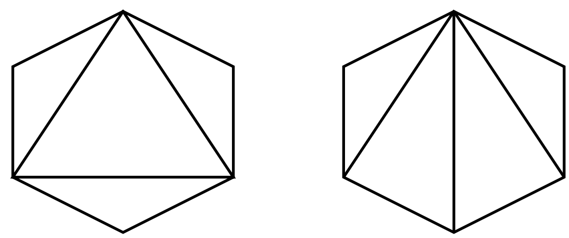
(b) **(1 ponto)** Se $P_n = (x, y)$, encontre n em função de x e y.

6. Um baralho tem $n+1$ cartas verdes e n cartas amarelas. Embaralhamos as cartas e passamos a tirar as cartas uma por uma, contando as cartas de cada cor. Dizemos que a posição das cartas foi *boa* se da primeira até a última carta o número de cartas verdes contadas até este ponto for sempre maior do que o número de cartas amarelas. Por exemplo, com $n = 2$, a posição $VVAVA$ é boa pois o número de cartas verdes será sempre maior do que o número de cartas amarelas. Por outro lado, a posição $VVAAV$ não é boa, pois após terem sido contadas as quatro primeiras cartas temos um empate com duas cartas de cada cor.

   (a) **(1 ponto)** Para $n = 1, 2, 3, 4$, determine a probabilidade de que a posição das cartas seja boa.

   (b) **(1 ponto)** Ache a probabilidade de que a posição das cartas seja boa (em função de n).

7. **(2 pontos)** Um polígono convexo de $n > 3$ lados sempre pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos por $n - 3$ diagonais que não se cruzem. Dizemos que uma tal decomposição é *ímpar* se todo vértice do polígono for vértice de um número ímpar de triângulos da decomposição. Por exemplo, na figura abaixo a primeira decomposição é ímpar mas a segunda não.



Determine para quais valores de n um polígono convexo de n lados admite decomposição ímpar.