P4 de MAT1154 Com Gabarito
Equações Diferenciais e de Diferenças

Período: 2004.1

Data: 26 de junho de 2004.

Questões

Grupo I

1. Consider a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y + xy}{x - xy}.$$

(a) [1.0] Reescreva a equação na forma de uma equação com variáveis separadas.

(b) [1.0] Ache a solução geral implícita da equação encontrada no item anterior.

(c) [0.5] Se uma solução $y(x)$ satisfaz $y(1/2) = 2$ quanto valem $y(2)$ e $y'(2)$?

Resposta:

(a) Temos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y + xy}{x - xy} = \dfrac{y(-1+x)}{x(1-y)}$ o que é facilmente reescrito como

$$\boxed{\frac{1-y}{y}\,dy = \frac{-1+x}{x}\,dx.}$$

(b) A equação acima simplifica para $(\dfrac{1}{y} - 1)\,dy = (-\dfrac{1}{x} + x)\,dx$ e integrando os dois lados dá $\ln|y| - y = -\ln|x| + x + C$. Assim a solução geral implícita é $\ln|y| + \ln|x| - y - x = C$ o que se simplifica para

$$\boxed{\ln|yx| - y - x = C}$$

(c) Temos $\ln\left|2 \cdot \frac{1}{2}\right| - 2 - \frac{1}{2} = C$ portanto $C = -\dfrac{5}{2}$ e a solução é dada implicitamente por $\ln|yx| - y - x = -\dfrac{5}{2}$. Trocando o valor de $y = 2$ com o valor de $x = \dfrac{1}{2}$, a equação anterior continua válida portanto $y(2) = \dfrac{1}{2}$ e $y'(2) = \dfrac{-\dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{2}}{2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$. Assim

$$\boxed{y(2) = \frac{1}{2} \quad y'(2) = \frac{1}{2}}$$

2. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$x_{n+1} = ax_n + a^n. \tag{1}$$

(a) [1.0] Determine a solução geral da equação (1).

(b) [1.0] Determine as condições sobre a para que as soluções obtidas no item anterior satisfaçam que o limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

existe e é finito.

(c) [0.5] Encontre a solução x_n para a qual $x_1 = 1$.

Resposta:

(a) A solução geral da equação homogênea é $x_n = Ca^n$. Pelo método de coeficientes indeterminados há uma solução particular da forma αna^n. Substituindo na equação temos $\alpha(n+1)a^{n+1} = a\alpha na^n + a^n$. Dividindo por a^n resulta em $\alpha a(n+1) = \alpha an + 1$ do que deduzimos $\alpha = \dfrac{1}{a}$. Combinando as soluções temos:

$$\boxed{x_n = Ca^n + na^{n-1}}$$

(b) Para que a^n e na^{n-1} tenham um limite finito quando $n \to \infty$ é necessário e suficiente que

$$\boxed{|a| < 1.}$$

(c) Impondo a condição temos $1 = Ca + 1$, ou seja $C = 0$ e portanto

$$\boxed{x_n = na^{n-1}.}$$

Grupo II

3. Sabe-se que as funções $1+t$ e e^t são soluções da equação homogênea correspondente à

$$ty'' + (\alpha + \beta t)y' + \gamma y = 1 - t^2 \tag{2}$$

onde α, β, e γ são constantes.

(a) [1.0] Determine as constantes α, β, e γ.

(b) [1.0] Usando as constantes determinadas no primeiro item, ache uma solução de (2) sabendo que há uma que é um polinômio em t de grau 2 sem termo constante.

(c) [0.5] Usando as constantes determinadas no primeiro item, ache a solução geral de (2).

Resposta:

(a) Substituindo $y(t) = 1 + t$ na equação homogênea resulta em $(\alpha + \beta t) + \gamma(1 + t) = 0$ do qual segue $\alpha + \gamma = 0$ e $\beta + \gamma = 0$. Substituindo$y(t) = e^t$ na equação homogênea e dividindo por e^t dá $t + (\alpha + \beta t) + \gamma = 0$ o que result em $\beta = -1$ e de novo em $\alpha + \gamma = 0$. Disto deduzimos

$$\boxed{\alpha = -1 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 1.}$$

(b) A equação agora é $ty'' - (1 + t)y' + y = 1 - t^2$. Substituindo $y(t) = \alpha t + \beta t^2$ resulta em $t(2\beta) - (1 + t)(\alpha + 2\beta t) + (\alpha t + \beta t^2) = 1 - t^2$. Igualando os coeficientes de t^2, t, e 1 dos dois lados temos $-\beta = -1$, $0 = 0$, e $-\alpha = 1$ portanto

$$\boxed{y(t) = -t + t^2}$$

(c) As funções $1 + t$ e e^t são soluções linearmente independentes da equação homogênea, e a função $-t + t^2$ é uma solução particular, portanto a solução geral é:

$$\boxed{y(t) = C_1(t + 1) + C_2 e^t - t + t^2.}$$

4. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} - 2y = 0. \tag{3}$$

(a) [1.0] Assumindo que esta equação tem uma solução em forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ache uma formula de recorrência para os coeficientes a_n.

(b) [0.5] Mostre que qualquer solução da e.d.o.

$$y' = 2ty \tag{4}$$

satisfaz também a equação (3).

(c) [1.0] Ache a solução da equação (4) tal que $y(0) = 1$ e escreva a sua série de potências em torno de $t = 0$.

Resposta:

(a) Substituindo a série na equação e ajustando os expoentes de t temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} na_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

portanto a relação de recorrência é $(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n = 0$ o que simplifica para

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{2}{n+2}\,a_n.}$$

(b)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Derivando } \; y' - 2ty = 0 \\ \text{resulta em } y'' - 2ty' - 2y = 0 \end{array}}$$

(c) A solução geral de (4) é $y(t) = Ce^{t^2}$. A condição $y(0) = 1$ resulta em $C = 1$ e portanto:

$$\boxed{\text{A solução é } y(t) = e^{t^2} \text{ e a série de potências é } y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}}$$

Grupo III

5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3+a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) [1.5] Para cada um dos tipos *repulsor, sela, atrator* ache os valores de a para os quais a matriz pertence ao tipo.

(b) [1.0] Determine os valores de a para os quais o sistema $X' = AX$ possui uma solução constante diferente de zero.

Resposta:

(a) O polinômio característico da matriz é $\lambda^2 - (3+2a)\lambda + (3a + a^2 - 4)$ cujas raízes são $a+4$ e $a-1$. Para ser repulsor as duas raízes devem ser positivas, ou seja $a > -4$ e $a > 1$, ou seja simplesmente $a > 1$. Para ser uma sela as raízes devem ser de sinais opostos o que significa $a + 4 > 0$ e (a-1¡0), ou seja $-4 < a < 1$. Par ser um atrator as duas raízes devem ser negativas, ou seja $a < -4$ e $a < 1$, ou simplesmente $a < -4$. Assim,

Repulsor:	$a > 1$
Sela:	$-4 < a < 1$
Atrator:	$a < -4$

(b) Para haver uma solução constante diferente de zero a matriz deve ser singular, ou seja, ter uma raiz zero. Portanto

Há uma solução constante nao nula somente para $a = -4$ e $a = 1$

6. Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 2\pi & \pi & 7\pi \\ 0 & \dfrac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Sabendo que a matriz é diagonalizável, calcule

$$\frac{e^{\cos A} - I}{e - 1}.$$

Resposta:

A função em questão é $f(z) = \dfrac{e^{\cos z} - 1}{e - 1}$ A matriz é triangular, portanto os autovalores são os elementos na diagonal, ou seja 2π e $\frac{3\pi}{2}$, repetido. Dado que a matriz é diagonalizável, não há necessidade de considerar as multiplicidades dos autovalores e podemos procurar um polinômio linear $q(z) = \alpha + \beta z$ que coincide com $f(z)$ nos autovalores. Assim $q(2\pi) = \alpha + 2\pi\beta = f(2\pi) = 1$ e $q\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \alpha + \dfrac{3\pi}{2}\beta = f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. Disto deduzimos que $\alpha = -3$ e $\beta = \dfrac{2}{\pi}$. Temos agora $f(A) = -3I + \dfrac{2}{\pi}A$ e fazendo a conta concluimos

$$\boxed{\frac{e^{\cos A} - I}{e - 1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$