# P3 de MAT1154 com Gabarito

Equações Diferenciais e de Diferenças

Período: 2004.1

Data: 19 de junho de 2004

# Questões

1. [3.0] Considere a equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad \text{com} \quad g(0) = 0$$

   (a) [1.0] Escreva a equação acima como um sistema de duas equações de ordem 1 (i.e. envolvendo apenas derivadas de ordem 1).

   (b) [1.0] Verifique que $(0, 0)$ é um ponto crítico desse sistema.

   (c) [1.0] Dado que $g'(0) = -2$ determine se $(0, 0)$ é um ponto crítico estável ou instável.

**Resposta**

(a) Definindo $y = \dfrac{dx}{dt}$ e substituindo na equação original temos as duas equções:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= y - g(x) \end{aligned}}$$

(b) As duas funções do lado direito do sistema acima são $y$ e $y - g(x)$. Temos:

| |
|---|
| Em $(0, 0)$ a função $y$ vale 0<br>Em $(0, 0)$ a função $y - g(x)$ vale $0 - g(0) = 0$<br>Logo $(0, 0)$ é um ponto crítico. |

(c) A matriz jacobiana do lado direito do sistema acima é: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x) & 1 \end{pmatrix}$ a qual no ponto $(0, 0)$ vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. O polinômio característico desta matriz é $\lambda^2 - \lambda - 2$ cujas raízes são $-1$ e $2$. São raízes reais com sinais opostos, portanto

| |
|---|
| O ponto crítico é instável. |

2. [2.0] Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule

$$f(A) = (A^3 - 6A^2 + 9A - 3I)^{200}$$

**Resposta**

O polinômio característico da matriz é $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ cujas raízes são 2 e 4. A função em questão é $f(z) = (z^3 - 6z^2 + 9z - 3)^{200}$. Temos

$$\begin{aligned} f(2) &= (8 - 24 + 18 - 3)^{200} = (-1)^{200} = 1 \\ f(4) &= (64 - 96 + 36 - 3)^{200} = (1)^{200} = 1 \end{aligned}$$

Procuramos agora um polinômio linear $q(z) = a + bz$ tal que $q(2) = f(2)$ e $q(4) = f(4)$ ou seja $a + 2b = 1$ e $a + 4b = 1$. A solução é $a = 1$ e $b = 0$. Portanto $f(A) = q(A) = aI + bA = I$. Assim

$$\boxed{f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. [2.0] Considere o sistema de equações de diferenças:

$$X_{n+1} = AX_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) [1.0] Determine $A^n$.

(b) [0.5] Sabe-se que há uma solução particular da forma $\beta n$ onde $\beta$ é um vetor constante. Determine $\beta$.

(c) [0.5] Ache a solução da equação (1) que satisfaz $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Resposta**

(a) A matriz é triangular, portanto os autovalores são os elementos na diagonal, sendo então 1 repetido. A função em questão é $f(z) = z^n$. Procuramos um polinômio linear $q(z) = a + bz$ tal que $q(1) = f(1)$ e $q'(1) = f'(1)$ ou seja $a + b = 1$ e $b = n$. A solução é $a = 1 - n$ e $b = n$. Portanto $A^n = aI + bA = (1 - n)I + nA$, e fazendo a conta temos:

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(b) Substituindo a forma da solução particular na equação, temos $\beta(n + 1) = A\beta n + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Seja $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. A equação anterior vira:

$$\begin{pmatrix} na + a \\ nb + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na + nb \\ nb \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $na + a = na + nb + 1$ e $nb + b = nb$ cuja solução é $a = 1$ e $b = 0$. Assim

$$\boxed{\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(c) A solução geral é $X_n = A^nC + \beta n$ onde $C$ é um vetor arbitrário. Para $n = 1$ isto vira $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou seja, $1 = c_1 + c_2 + 1$ e $1 = c_2$ cuja solução é $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$. Assim

$$\boxed{X_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n - 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4. [3.0] Considere o sistema não linear:

$$\begin{aligned} x' &= (x-y)^2 - 1 \\ y' &= -x \end{aligned}$$

(a) [1.0] Determine os pontos críticos do sistema.

(b) [1.0] Determine as linearizações do sistema em torno de cada ponto crítico e classifique-os conforme tipo e estabilidade.

(c) [1.0] Esboce no plano de fase os pontos críticos, as nulinclinais (os pontos onde $x' = 0$ e onde $y' = 0$), e as direções de movimento em cada região delimitada pelas nulinclinais.

**Resposta**

(a) Devemos resolver simultaneamente $(x-y)^2 - 1 = 0$ e $x = 0$. Com $x = 0$ a primeira equação dá $y^2 - 1 = 0$, ou seja $y = \pm 1$. Portanto

$$\boxed{\text{Os pontos críticos são: } (0,-1) \text{ e } (0,1)}$$

(b) A matriz jacobiana do sistema é: $\begin{pmatrix} 2(x-y) & 2(y-x) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Em $(0,-1)$ a matriz jacobiana é $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ com polinômio característico $\lambda^2 - 2\lambda - 2$ com raízes $\dfrac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. A linearização é uma sela e portanto instável. Em $(0,1)$ a matriz jacobiana é $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ com polinômio característico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ com raízes $\dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$. A linearização é uma espiral atratora e portanto assintoticamente estável.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Em } (0,-1) \text{ a linearização é } Z' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z. \text{ É uma sela, logo instável.} \\ \text{Em } (0,1) \text{ a linearização é } Z' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z. \text{ É uma espiral atratora, logo estável.} \end{array}}$$

(c) Os pontos onde $x' = 0$ são dados por $(x-y)^2 - 1 = 0$, ou seja $x - y = \pm 1$ o que define duas retas $y = x+1$ e $y = x-1$. Os pontos onde $y' = 0$ são dados por $-x = 0$ o que define o eixo $y$.