P2 de MAT1154 com Gabarito
Equações Diferenciais e de Diferenças
Período: 2004.1

Data: 15 de maio de 2004

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \qquad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \qquad s > a$
3. t^n, $n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad s > 0$
4. t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \qquad s > 0$
5. $\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0$
7. $\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > \|a\|$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > \|a\|$
9. $e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \qquad s > a$
11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad s > a$
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$, $c > 0$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$

Questões

1. Considere a equação de diferenças linear de segunda ordem

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = k2^k. \tag{1}$$

   (a) [1.0] Determine duas soluções linearmente independentes da equação homogênea correspondente.

   (b) [1.0] Determine a solução geral da equação (1).

   (c) [0.5] Determine a solução que atende às condições iniciais $y_0 = 0$ and $y_1 = 1$.

   Resposta:

   (a) A equação característica é $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ cujas raízes são 1 e 2 portanto a solução geral da equação homogênea é:

$$\boxed{y_k = C_1 + C_2 2^k}$$

   (b) Precisamos achar uma solução particular. Pelo método de coeficientes indeterminados, já que 2 é raiz não repetida da equação característica, sabemos que há uma solução de forma $y_k = (ak + bk^2)2^k$. Substituindo na equação temos

$$(a(k+2) + b(k+2)^2)2^{k+2} - 3(a(k+1) + b(k+1)^2)2^{k+1} + 2(ak + bk^2)2^k = k2^k$$

   Dividindo por 2^k e depois igualando os coeficientes de k^2, k, e 1 dos dois lados achamos $a = -5/4$ e $b = 1/4$ portanto uma solução particular é $(-\frac{1}{4}k + \frac{5}{4}k^2)2^k$ e a solução geral é:

$$\boxed{y_k = C_1 + C_2 2^k + (-\frac{5}{4}k + \frac{1}{4}k^2)2^k}$$

   (c) Usando a equação geral, de $y_0 = 0$ temos $0 = C_1 + C_2$ e de $y_1 = 1$ temos $1 = C_1 + 2C_2 - 2$. Resolvendo achamos $C_1 = 3$ e $C_2 = -3$. A resposta então é:

$$\boxed{y_k = 3 - 3\,2^k + (-\frac{1}{4}k + \frac{5}{4}k^2)2^k}$$

2. Sabe-se que $\dfrac{1}{t}$ é uma solução da equação homogênea associada à equação

$$t^2 y'' - 2y = t^3. \tag{2}$$

Determine a solução geral da equação (2).

Resposta: Usando variação de parâmetros seja $y(t) = w(t)\frac{1}{t}$. Substituindo na equação e mantendo somente os termos onde w é diferenciado, temos:

$$t^2 \left(w'' \frac{1}{t} - 2w' \frac{1}{t^2} \right) = t^3$$

o que simplifica para

$$w'' - \frac{2}{t} w' = t^2$$

A solução geral para esta equação de primeira ordem para w' é $w'(t) = C_1 t^2 + t^3$ e integrando achamos $w(t) = C_2 + C_1 t^3 + \frac{1}{4} t^4$. Finalmente

$$\boxed{y(t) = C_1 t^2 + C_2 \frac{1}{t} + \frac{1}{4} t^3}$$

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + \omega^2 y = g(t), \quad t \geq 0$$

onde g é uma função dada.

(a) [0.5] Justifique a afirmação que a solução geral da equação homogênea correspondente é da forma $C_1 \operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4)) + C_2 \cos(\omega(t-\pi/4))$.

(b) [1.0] Mostre que a solução da equação não homogênea verificando $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ é dada por

$$g(t) \star \left(\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}\right)$$

onde por $\star$ indicamos a operação de convolução. [Dica: use o teorema de convolução.]

(c) [1.0] Resolve a equação não homogênea para $g(t) = \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi)$.

Resposta:

(a) Basta verificar que as duas funções $\operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4))$ e $\cos(\omega(t-\pi/4))$ são soluções e que são linearmente independentes. Derivando temos

$$(\operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4)))'' = \omega(\cos(\omega(t-\pi/4)))' = -\omega^2 \operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4))$$

$$(\cos(\omega(t-\pi/4)))'' = -\omega(\operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4))) = -\omega^2 \cos(\omega(t-\pi/4))$$

portanto as duas **são** soluções da equação homogênea. Por outro lado

$$\frac{\operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4))}{\cos(\omega(t-\pi/4))} = \tan(\omega(t-\pi/4))$$

o que não é constante e as duas funções são linearmente independentes. A justificativa seria

$\operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4))$ e $\cos(\omega(t-\pi/4))$
são duas soluções linearmente independetes, portanto, a solução geral é
$C_1 \operatorname{sen}(\omega(t-\pi/4)) + C_2 \cos(\omega(t-\pi/4))$

(b) Calculando a transformada de Laplace dos dois lados da equação temos

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) = G(s)$$

o que para $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$) resulta em

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{1}{s^2 + \omega^2}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pelo teorema de convolução temos}\\ y(t) = g(t) \star \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = g(t) \star \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}\end{array}}$$

(c) Usando of fato $\delta(t-c) \star f(t) = u_c(t) f(t-c)$ temos

$$\boxed{y(t) = u_\pi(t)\frac{\operatorname{sen}(\omega(t-\pi))}{\omega} + u_{2\pi}(t)\frac{\operatorname{sen}(\omega(t-2\pi))}{\omega}}.$$

Alternativamente usando $\mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}$ temos

$$Y(s) = e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+\omega^2} + e^{-2\pi}\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

e pela tabela de transformada de Laplace chegamos à mesma resposta.

4. Considere a equação diferencial

$$(4 - x^2)y'' + 2y = 0.$$

Suponha que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma solução em forma de série da equação acima que satisfaz $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

(a) [1.5] Determine a relação de recorrência satisfeita pelos coeficientes a_n da série acima.

(b) [1.0] Com base na relação de recorrência encontrada, verifique que os coeficientes a_n com n par são todos nulos.

Resposta:

(a) Substituindo a série na equação dá

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n-1)na_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

Ajustando o primeiro somatório temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

Assim a relação de recorrência é $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - n - 2)a_n = 0$ e já que $n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1)$ temos finalmente

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{n-2}{n+2}\, a_n}$$

(b) A relação de recorrência relaciona a_{n+2} e a_n, portanto relaciona separadamente os coeficientes a_n com índice par e índice ímpar. Dado que $a_0 = y(0) = 0$ todos os a_n com n par sao nulos.

$$\boxed{a_0 = y(0) = 0 \text{ e } a_{n+2} = \frac{n-2}{n+2}\, a_n \text{ implicam } a_n = 0 \text{ para } n \text{ par}}$$