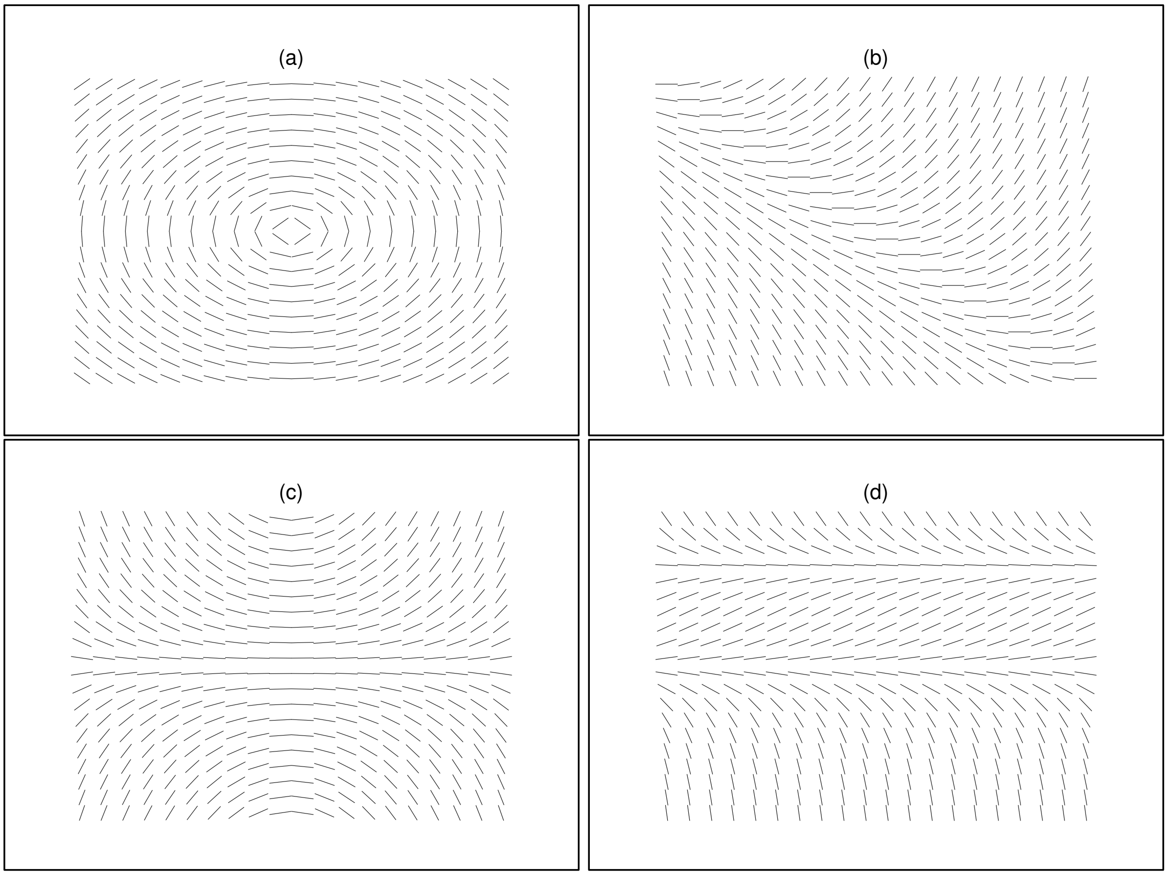
P1 de MAT1154 com Gabarito
Equações Diferenciais e de Diferenças
Período: 2004.1
Data: 03 de abril de 2004


(a)
(b)
(c)
(d)

Questões

1. Considere os quatro campos de direções desenhados na folha oposta. Eles correspondem a equações diferenciais da forma $y' = f(x, y)$ e onde o centro de cada desenho é a origem do plano xy. Considere também as seguintes seis equações diferenciais para $y(x)$.

(1) $y' = y + x$	(2) $y' = x^2 + y^2$	(3) $y' = xy$
(4) $y' = y + x^2$	(5) $y' = \frac{1}{2}y(4 - y)$	(6) $y' = -x/y$

   (a) Para cada campo de direções identifique a equação diferencial da qual ele é o campo. (a) _____ (b) _____ (c) _____ (d) _____

   (b) Para as seis equações diferenciais, diga quais delas verificam as seguintes propriedades:

   - Linear homogênea:____________________
   - Linear não homogênea:____________________
   - De variáveis separáveis:____________________
   - Possui uma solução constante:____________________

Resposta

(a)

(a) 6 (b) 1 (c) 3 (d) 5

(b)

Linear homogênea: 3
Linear não homogênea: 1 4
De variáveis separáveis: 5 3 6
Possui uma solução constante: 5 3

2. Considere a seguinte equação diferencial linear:

$$t\frac{dy}{dt} + 3y(t) = t^3, \quad t > 0 \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogênea associada a equação (1).

(b) Encontre a solução geral de (1).

(c) Encontre a solução $y(t)$ de (1) satisfazendo $y(1) = 7/6$.

Resposta

Dividindo por t colocamos a equação na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y(t) = t^2$$

(a) A equação homogênea é $\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y(t) = 0$ cuja solução geral é

$$\boxed{y(t) = Ce^{-\int \frac{3}{t}\,dt} = C^{-3\ln t} = \frac{C}{t^3}}$$

(b) Usando o método de variação de parâmetros, seja $y(t) = \dfrac{w(t)}{t^3}$. Substituindo na equação não homogênea e simplificando temos $\dfrac{w'(t)}{t^3} = t^2$, ou seja $w'(t) = t^5$ e portanto $w(t) = \dfrac{1}{6}t^6 + C$. Assim temos que a solução geral da equação não homogênea é:

$$\boxed{y(t) = \frac{C}{t^3} + \frac{1}{6}t^3}$$

Equivalentemente usando um fator integrante temos $\mu(t) = e^{\int \frac{3}{t}\,dt} = e^{3\ln t} = t^3$, portanto uma solução particular é dada por

$$y_p(t) = \frac{\int \mu(t)h(t)\,dt}{\mu(t)} = \frac{\int t^5\,dt}{t^3} = \frac{t^6/6}{t^3} = \frac{1}{6}t^3.$$

Somando isto com a solução geral da equação homogênea chegamos à mesma resposta.

(c) Impondo a condição $y(1) = 7/6$ temos $\dfrac{7}{6} = C + \dfrac{1}{6}$ logo $C = 1$ e a solução do problema de valor inicial é:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{6}t^3}$$

3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t \\ y(1) = a \end{cases}$$

(a) Determine a equação da iteração de Euler na sua forma explícita.

(b) Determine a equação da iteração de Heun na sua forma explícita.

(c) Use os resultados acima para calcular $y(2)$ em dois passos pelo método de Heun em função da constante a.

Resposta

(a) Iteração de Euler:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(y_n + t_n) = (1+h)y_n + t_n}$$

(b) Iteração de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n))\right].$$

Temos $f(t_n, y_n) = y_n + t_n$ e assim

$f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)) = y_n + h(y_n + t_n) + t_n + h = (1+h)y_n + (1+h)t_n + h.$

Substituindo na formula de Heun e simplificando temos:

$$\boxed{y_{n+1} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) y_n + \left(h + \frac{h^2}{2}\right) t_n + \frac{h^2}{2}}$$

(c) Para $h = 0,5$ a expressão acima vira:

$$y_{n+1} = \frac{13}{8}y_n + \frac{5}{8}t_n + \frac{1}{8}.$$

Assim sendo temos:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t_0 = 1,0 & y_0 = a \\ t_1 = 1,5 & y_1 = \frac{13}{8}y_0 + \frac{5}{8}t_0 + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}a + \frac{3}{4} \\ t_2 = 2,0 & y_2 = \frac{13}{8}y_1 + \frac{5}{8}t_1 + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}\left(\frac{13}{8}a + \frac{3}{4}\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{8} = \frac{169}{64}a + \frac{73}{32} \end{array}}$$

4. Considere a seguinte equação de diferenças:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n + 6 \tag{2}$$

(a) Ache uma solução constante de (2).

(b) Ache uma solução de (2) que satisfaz $y_0 = 2$.

Resposta

(a) Seja $y_n = K$ uma solução constante. Substituindo na equação temos $K = \frac{1}{2}K + 6$, ou seja $K = 12$. Portanto a solução constante é:

$$\boxed{y_n = 12}$$

(b) A equação homogênea é $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} y_n$ cuja solução geral é $y_n = C\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. A solução geral da equação não homogênea portanto é $y_n = C\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 12$. Impondo a condição $y_0 = 2$ temos $2 = C + 12$, ou seja $C = -10$. Assim a solução pedida é:

$$\boxed{y_n = -10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 12}$$