P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.2
Data: 24 de novembro de 2007

Nome: GABARITO ________________________ Matrícula:__________
Assinatura:______________________________ Turma:__________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja y a solução do problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \quad y(0) = \pi/4, \quad y'(0) = 0$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} \pi - t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

(a) Calcule $y(t)$.

(b) Faça um esboço do gráfico de $y(t)$.

Solução: (a) Temos

$$f(t) = \pi - t + u_\pi(t)(t - \pi).$$

Aplicando Laplace aos dois lados da equação temos

$$s^2 Y - \frac{\pi}{4}s + 4Y = \frac{\pi}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\frac{\pi}{4}s^3 + \pi s - 1}{s^2(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2(s^2+4)} \\ &= \frac{\pi}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{8}\frac{2}{s^2+2^2} + e^{-\pi s}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{8}\frac{2}{s^2+2^2}\right) \end{aligned}$$

donde

$$y(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + u_\pi(t)\left(\frac{t-\pi}{4} - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2(t-\pi))\right).$$

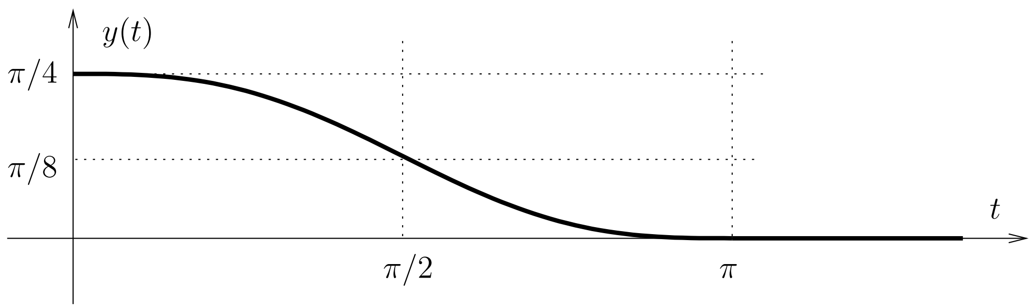
(b) Temos

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{t}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2t), & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t \ge \pi, \end{cases}$$

$$y'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2t), & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t \ge \pi, \end{cases}$$

$$y''(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t), & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$

A partir destas fórmulas é fácil ver que $y(0) = \pi/4$ e $y(t) = 0$ para $t \ge \pi$, a função y é decrescente no intervalo $(0, \pi)$ com único ponto de inflexão em $y(\pi/2) = \pi/8$.



2. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n < 10$.

(c) Diga se o ponto $t = 0$ é ponto de mínimo local de $y(t)$.

Solução: (a) Pelo enunciado, $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$. Expandindo temos

$$\begin{aligned} y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + \cdots \\ y &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots \\ \frac{t^2}{2} y &= 0 + 0 + \frac{1}{2} a_0 t^2 + \cdots + \frac{1}{2} a_{n-2} t^n + \cdots \\ \frac{e^t + e^{-t}}{2} &= 1 + 0 + \frac{1}{2!} t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots \end{aligned}$$

donde, para $n \geq 2$,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n + \frac{1}{2} a_{n-2} = c_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

O caso $n = 0$ dá $2a_2 + a_0 = 1$ donde $a_2 = 0$. O caso $n = 1$ dá $6a_3 + a_1 = 0$ donde $a_3 = 0$.

(b) Aplicando a relação do item (a) temos

$$\begin{aligned} 12a_4 + a_2 + \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2} \quad &\rightarrow \quad a_4 = 0 \\ 20a_5 + a_3 + \frac{1}{2} a_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad a_5 = 0 \\ 30a_6 + a_4 + \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{24} \quad &\rightarrow \quad a_6 = \frac{1}{720} \\ 42a_7 + a_5 + \frac{1}{2} a_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad a_7 = 0 \\ 56a_8 + a_6 + \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{720} \quad &\rightarrow \quad a_8 = 0 \\ 72a_9 + a_7 + \frac{1}{2} a_5 = 0 \quad &\rightarrow \quad a_9 = 0. \end{aligned}$$

(c) Temos $y(t) = 1 + t^6 h(t)$ onde $h(t) = a_6 + a_7 t + \cdots$ é uma função suave com $h(0) = 1/720 > 0$. Assim temos $h(t) > 0$ para t próximo de 0 e portanto $y(t) > 1$ para $t \neq 0$ próximo de 0. Assim o ponto $t = 0$ é ponto de mínimo local de $y(t)$.

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^3 + 4s^2 + 5s}$$

Solução: Temos

$$F(s) = e^{-2s}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1^2} - \frac{2}{5}\frac{1}{(s+2)^2 + 1^2}\right)$$

donde

$$f(t) = u_2(t)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-2(t-2)}\cos(t-2) - \frac{2}{5}e^{-2(t-2)}\operatorname{sen}(t-2)\right).$$

(b)

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-3)^4}$$

Solução: Temos

$$F(s) = \frac{1}{(s-3)^3} + \frac{2}{(s-3)^4}$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{3t} + \frac{1}{3}t^3e^{3t}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

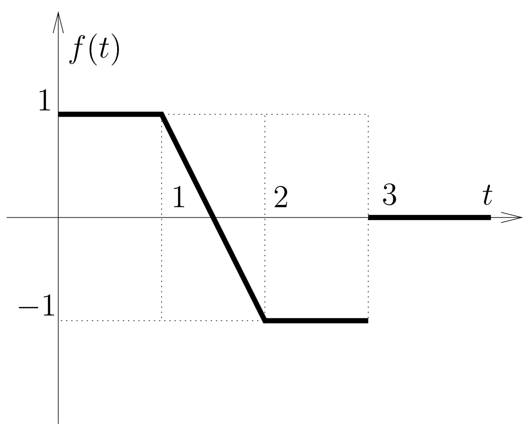
(a)

$$f(t) = |1 - t|.$$

Solução: Temos $f(t) = 1 - t + 2u_1(t)(t - 1)$ donde

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2}.$$

(b) A função f tem o gráfico abaixo:



Solução: Temos

$$f(t) = 1 + u_1(t)(-2(t - 1)) + u_2(t)(2(t - 2)) + u_3(t)$$

donde

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$