P1 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2005.2
Data: 10 de setembro de 2005

Nome:______________________________ Matrícula:____________
Assinatura:___________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	2.0		
1c	2.0		
2	2.0		
3	2.0		
Total	10.0		

Instruções

- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- A prova pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
- Você tem direito a uma folha de consulta.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Resolva os problemas de valor inicial abaixo, isto é, encontre a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais dadas.

   (a)
$$y' = xy^2, \quad y(1) = 2.$$

   Solução:

   Podemos escrever $dy/dx = xy^2$ donde $\int y^{-2} dy = \int x dx + C$.
   Integrando temos $-y^{-1} = (x^2/2) + C$ ou

$$y = -\frac{2}{x^2 + 2C}.$$

   Substituindo $x = 1$ e $y = 2$ temos $C = -2$, donde

$$y = \frac{2}{2 - x^2}.$$

(b)
$$y' + (\tan x)\, y = \cos x, \quad y(0) = 1.$$

Solução:
Vamos primeiro resolver a equação homogênea:

$$y_h' + (\tan x)\, y_h = 0.$$

Separando as variáveis (e ignorando a constante de integração) temos

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int \tan x dx = \int \frac{-\operatorname{sen} x dx}{\cos x}$$

donde $\ln(|y_h|) = \ln(|\cos x|)$ ou $y_h = \cos x$.
Vamos resolver agora a equação original usando variação dos parâmetros: substituindo $y = zy_h = z\cos x$ na equação original obtemos

$$z' \cos x = \cos x$$

donde $z(x) = x + C$ (para alguma constante C) ou

$$y = (x + C)\cos x.$$

Substituindo $x = 0$ e $y = 1$ obtemos $C = 1$ donde

$$y = (x + 1)\cos x.$$

(c)

$$y'' - 7y' + 10y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solução:

Resolvendo a equação associada $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ obtemos as raízes reais distintas $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$. Assim a solução geral da equação homogênea é

$$y_h = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{5x}.$$

Vamos usar coeficientes a determinar para encontrar uma solução particular y_p. Faça

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Cx\, e^{2x} \\ y_p'(x) &= 2Cx\, e^{2x} + C\, e^{2x} \\ y_p''(x) &= 4Cx\, e^{2x} + 4C\, e^{2x} \end{aligned}$$

donde

$$y'' - 7y' + 10y = -3C\, e^{2x} = e^{2x}$$

donde $C = -1/3$ e a solução geral da equação diferencial é

$$y = -\frac{1}{3}x\, e^{2x} + C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{5x}$$

e temos $y(0) = C_1 + C_2 = 0$, $y'(0) = (-1/3) + 2C_1 + 5C_2 = 0$. Resolvendo o sistema temos $C_1 = -1/9$ e $C_2 = 1/9$ donde

$$y = -\frac{1}{3}x\, e^{2x} - \frac{1}{9}\, e^{2x} + \frac{1}{9}\, e^{5x} = \frac{(-3x-1)\, e^{2x} + e^{5x}}{9}.$$

2. Considere os quatro campos de direções desenhados na próxima página. Eles correspondem a equações diferenciais da forma $y' = f(x, y)$. Cada desenho mostra o quadrado de vértices $(\pm 2, \pm 2)$ e o centro de cada desenho é a origem do plano xy. Considere também as seguintes oito equações diferenciais.

   1. $y' = x$
   2. $y' = x^2/2$
   3. $y' = 1/x$
   4. $y' = x - y$
   5. $y' = x + y$
   6. $y' = -x/y$
   7. $y' = -y^2$
   8. $y' = x^2 + y^2$

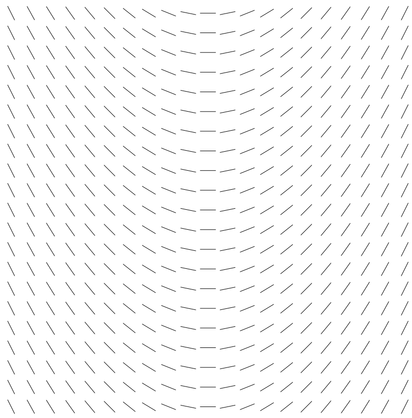
   Cada um dos quatro desenhos corresponde a uma das oito equações dadas. Identifique as correspondências.

   Solução:

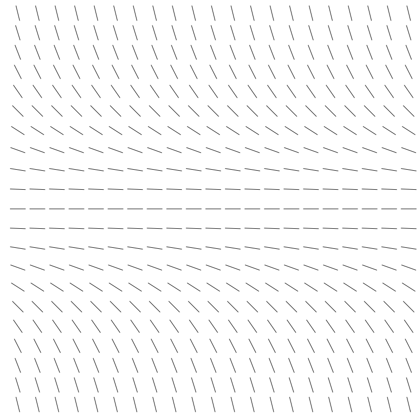
   A correspondência correta é a1, b7, c6, d4. Apresentamos abaixo uma forma de eliminar as opções erradas.

   As equações 2 e 8 satisfazem $y' \geq 0$ para todo ponto o que não coincide com nenhum dos quatro diagramas. Na equação 3 temos y' não definido em nenhum ponto do eixo y, o que também não confere com os diagramas. Além disso, a equação 5 satisfaz $y' = 0$ ao longo da reta $x + y = 0$ o que também não corresponde a nenhum dos diagramas. Assim as quatro equações que correspondem a diagramas são 1, 4, 6 e 7.

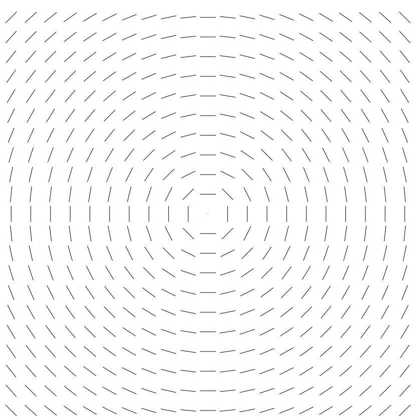
   A equação 7 satisfaz $y' = 0$ no eixo x e $y' < 0$ nos demais pontos, o que só pode corresponder ao diagrama b. A equação 4 satisfaz $y' = 0$ na reta $x = y$, o que só se verifica no diagrama d. Na equação 1, y' tem o sinal de x, o que corresponde ao diagrama a. Finalmente, na equação 6, temos $y' = 0$ no eixo y e y' não definido (ou $y' = \infty$) no eixo x: diagrama c.



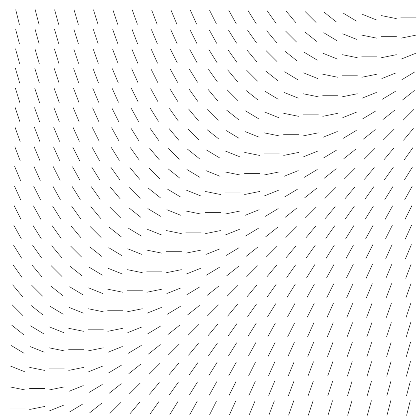
(a)



(b)



(c)



(d)

3. A função $y_1(x) = e^x \cos 2x$ é solução da equação diferencial

$$y'' + by' + cy = 0,$$

onde b e c são constantes reais. Encontre a solução $y_2(x)$ da mesma equação que satisfaça

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Solução:

Para uma equação desta forma, se $e^x \cos 2x$ é solução então $e^x \operatorname{sen} 2x$ também é e a solução geral é

$$y = C_1\, e^x \cos 2x + C_2\, e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Substituindo as condições iniciais para y_2 temos $C_1 = 0$ e $C_2 = 1/2$, donde

$$y_2 = \frac{1}{2}\, e^x \operatorname{sen} 2x.$$