Lista 1
29/04/2004

(1) Quantos elementos tem o anel $\mathbb{Z}[X]/(7, X^2 - 1)$?

(2) Exiba dois anéis comutativos com unidade não isomorfos de ordem 8.

(3) Seja $C^0([0,1], \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Com a soma e produto usuais, mostre que $C^0([0,1], \mathbb{R})$ é um anel comutativo com unidade. Mostre que não existem elementos irredutíveis em $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

(4) Sejam $q_0, q_1 \in \mathbb{Z}/(p)[X]$. Mostre que $q_0(x) = q_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}/(p)$ se e somente se $(X^p - X)|(q_1 - q_0)$.

(5) Exiba um polinômio irredutível de grau 2 em $(\mathbb{Z}/(13))[X]$ e use-o para construir um corpo com 169 elementos.

(6) Sejam $A_2 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 2)$ e $A_4 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 4)$. Diga se A_2 e A_4 são isomorfos.

(7) Sejam $A_2 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 2)$ e $A_3 = ((\mathbb{Z}/(5))[X])/(X^2 - 3)$. Diga se A_2 e A_3 são isomorfos.

(8) Seja $p \in \mathbb{Z}[X] \subseteq (\mathbb{Z}[i])[X]$ um polinômio de coeficientes inteiros de grau maior ou igual a 1. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
(a) Se p é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$ então é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}[i])[X]$.
(b) Se p é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}[i])[X]$ então é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$.

(9) Seja $\pi : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/(5))[X]$ o homomorfismo natural que toma cada coeficiente módulo 5. Seja $p \in \mathbb{Z}[X]$ um polinômio mônico de coeficientes inteiros e de grau maior ou igual a 1 (um polinômio é *mônico* se seu coeficiente de grau mais alto é 1). Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
(a) Se p é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$ então $\pi(p)$ é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}/(5))[X]$.
(b) Se $\pi(p)$ é irredutível como elemento de $(\mathbb{Z}/(5))[X]$ então p é irredutível como elemento de $\mathbb{Z}[X]$.

(10) Seja a um inteiro. Mostre que se a equação

$$x^2 - 2y^2 = a$$

tem alguma solução inteira, então ela tem infinitas soluções inteiras. (Dica: considere o anel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ e seus elementos inversíveis.)

(11) Seja $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3}; a, b \in \mathbb{Z}\}$, com a soma e produto usuais. Mostre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ é um domínio onde não vale a fatoração única.

(12) Mostre que para todo primo p da forma $6n + 1$ existem inteiros a e b com $p = a^2 + 3b^2$ (dica: considere o anel $\mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$).