Geometria muito além dos Gregos

Jairo Bochi

Depto. de Matemática, PUC–Rio

Alguns personagens

- PITÁGORAS ($\sim$ 500 a.C.), EUCLIDES ($\sim$ 200 a.C.), ...

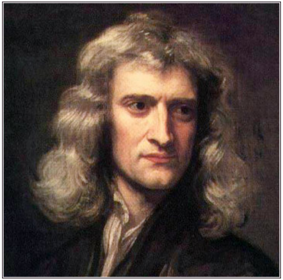
Escola de Atenas, de Rafael (1511).

Alguns personagens

- PITÁGORAS ($\sim$ 500 a.C.), EUCLIDES ($\sim$ 200 a.C.), ...
- René DESCARTES (1596–1650)

Alguns personagens

- PITÁGORAS ($\sim$ 500 a.C.), EUCLIDES ($\sim$ 200 a.C.), ...
- René DESCARTES (1596–1650)
- Isaac NEWTON (1643–1727), Gottfried LEIBNIZ (1646–1716)



Alguns personagens

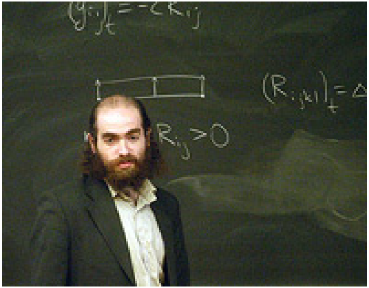
- PITÁGORAS ($\sim$ 500 a.C.), EUCLIDES ($\sim$ 200 a.C.), ...
- René DESCARTES (1596–1650)
- Isaac NEWTON (1643–1727), Gottfried LEIBNIZ (1646–1716)
- Carl F. GAUSS (1777–1855)

Alguns personagens

- PITÁGORAS ($\sim$ 500 a.C.), EUCLIDES ($\sim$ 200 a.C.), ...
- René DESCARTES (1596–1650)
- Isaac NEWTON (1643–1727), Gottfried LEIBNIZ (1646–1716)
- Carl F. GAUSS (1777–1855)
- Henri POINCARÉ (1854–1912), William THURSTON (1946–)

Alguns personagens

- PITÁGORAS ($\sim$ 500 a.C.), EUCLIDES ($\sim$ 200 a.C.), ...
- René DESCARTES (1596–1650)
- Isaac NEWTON (1643–1727), Gottfried LEIBNIZ (1646–1716)
- Carl F. GAUSS (1777–1855)
- Henri POINCARÉ (1854–1912), William THURSTON (1946–)
- Grigori PERELMAN (1966–)



Como medir o quanto uma curva se dobra?

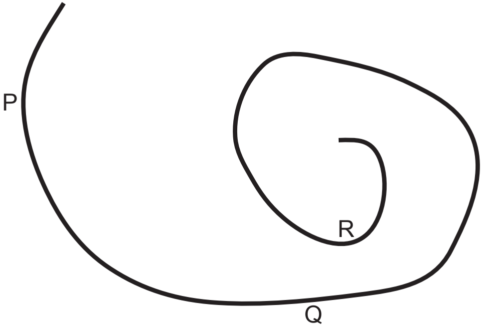
Consideremos uma curva C no plano: por exemplo, o percurso de uma estrada (em um terreno plano)

Nós vamos definir uma quantidade chamada *curvatura* que mede o quanto C se “dobra”.

Como medir o quanto uma curva se dobra?

Consideremos uma curva C no plano: por exemplo, o percurso de uma estrada (em um terreno plano)

Nós vamos definir uma quantidade chamada *curvatura* que mede o quanto C se "dobra".



Na curva acima, a curvatura no ponto R é maior do que em P. A curvatura em Q é menor ainda. Em símbolos: $k(R) > k(P) > k(Q)$.

Definindo a curvatura: retas e círculos

As curvas mais simples são as *retas*. Por definição a curvatura de uma reta é $\boxed{k = 0}$ em todos os pontos.

Definindo a curvatura: retas e círculos

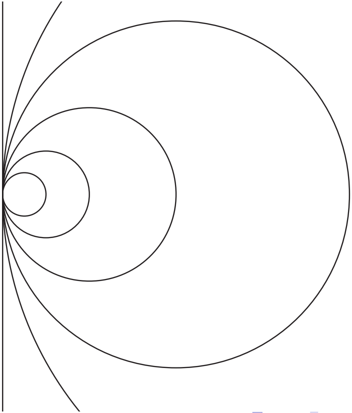
As curvas mais simples são as *retas*. Por definição a curvatura de uma reta é $\boxed{k = 0}$ em todos os pontos.

Depois consideramos círculos ("circunferências"). Se r é o raio do círculo, definimos sua curvatura como $\boxed{k = 1/r}$ (em todos os pontos). Portanto quanto maior o raio do círculo, menor é a sua curvatura.

Definindo a curvatura: retas e círculos

As curvas mais simples são as *retas*. Por definição a curvatura de uma reta é $\boxed{k = 0}$ em todos os pontos.
Depois consideramos círculos ("circunferências"). Se r é o raio do círculo, definimos sua curvatura como $\boxed{k = 1/r}$ (em todos os pontos). Portanto quanto maior o raio do círculo, menor é a sua curvatura.

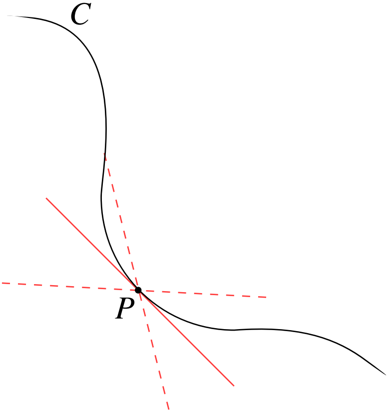
r (em cm)	$k = 1/r$ (em cm^{-1})
1	1
2	0.50
4	0.25
8	0.125
16	0.0625
∞	0



A reta é considerada um círculo de raio infinito.

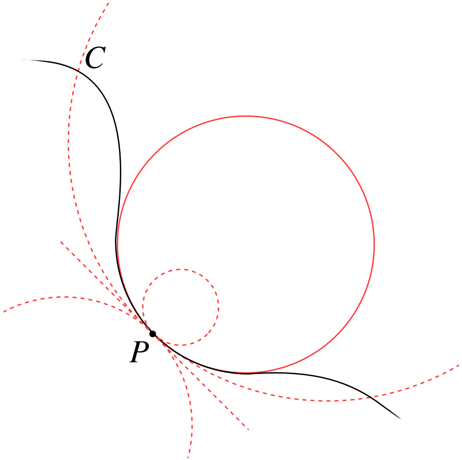
Reta tangente e círculo osculador

Seja P um ponto em uma curva C.
Dentre todas as retas passando por P, existe uma que melhor aproxima a curva C: ela é chamada *reta tangente*.



Reta tangente e círculo osculador

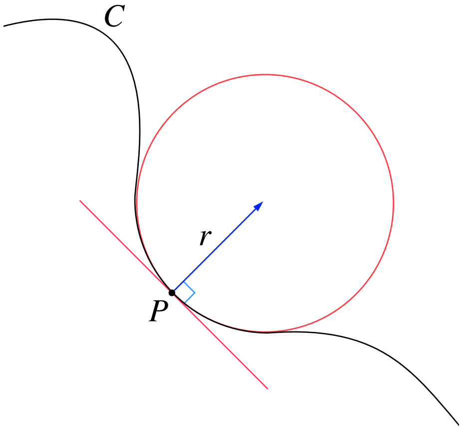
Seja P um ponto em uma curva C.
Dentre todos os círculos passando por P, existe um que melhor aproxima a curva C: ele é chamado *círculo osculador*.



Oscular: beijar. Ósculo: beijo (*Fonte: Aurélio.*)

Definindo a curvatura de uma curva qualquer

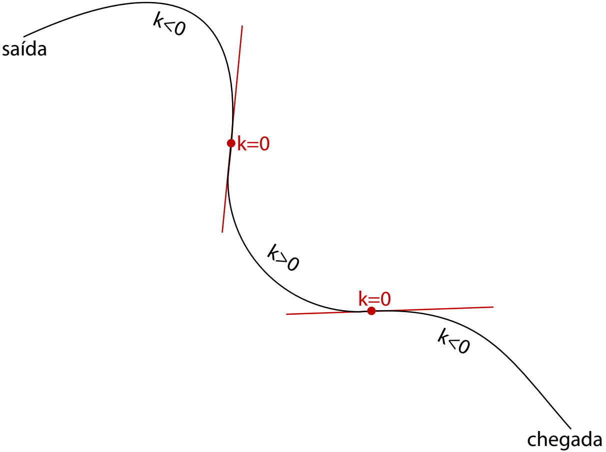
A curvatura da curva C no ponto P é definida como $\boxed{k = 1/r}$, onde r é o raio do círculo osculador à curva nesse ponto.



Curvatura com sinal

Fixemos um *sentido* no qual a curva C é percorrida (Dizemos que a curva é *orientada*.) Então podemos colocar um *sinal* na curvatura para indicar se estamos dobrando para direita $(-)$ ou a esquerda $(+)$.

 $k < 0$
 $k > 0$
 inflexão à frente

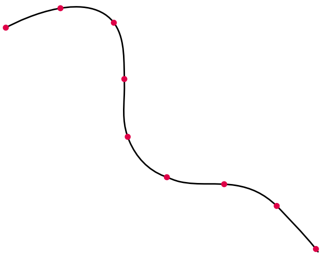


Curvatura média: o problema

Agora queremos definir a *curvatura média* de uma curva orientada C, levando em conta *todos* os pontos de C.
Mas como poderemos dar sentido a isso? A curva tem infinitos pontos!

Curvatura média: a solução

- Tomamos n pontos *igualmente espaçados* sobre a curva: P_1, P_2, ..., P_n.

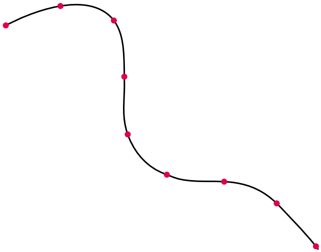


$n = 9$

Curvatura média: a solução

- Tomamos n pontos *igualmente espaçados* sobre a curva: P_1, P_2, ..., P_n.
- Determinamos as curvaturas (com sinal) em cada um dos pontos, e calculmos a média:

$$\bar{k}_n = \frac{k(P_1) + \cdots + k(P_n)}{n}$$



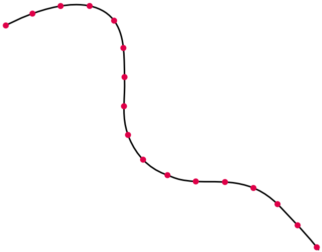
$$n = 9 \longrightarrow \bar{k}_9 = -3.604$$

Curvatura média: a solução

- Tomamos n pontos *igualmente espaçados* sobre a curva: P_1, P_2, ..., P_n.
- Determinamos as curvaturas (com sinal) em cada um dos pontos, e calculmos a média:

$$\bar{k}_n = \frac{k(P_1) + \cdots + k(P_n)}{n}$$

- Pegamos n maior e refazemos as contas.



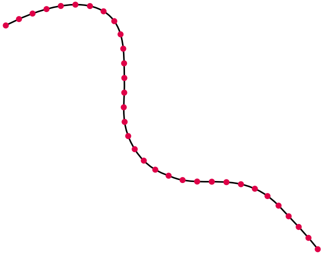
$$n = 18 \longrightarrow \bar{k}_{18} = -3.731$$

Curvatura média: a solução

- Tomamos n pontos *igualmente espaçados* sobre a curva: P_1, P_2, ..., P_n.
- Determinamos as curvaturas (com sinal) em cada um dos pontos, e calculmos a média:

$$\bar{k}_n = \frac{k(P_1) + \cdots + k(P_n)}{n}$$

- Pegamos n maior e refazemos as contas.



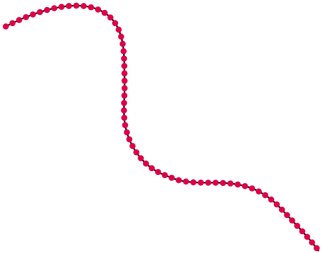
$$n = 36 \longrightarrow \bar{k}_{36} = -3.762$$

Curvatura média: a solução

- Tomamos n pontos *igualmente espaçados* sobre a curva: P_1, P_2, ..., P_n.
- Determinamos as curvaturas (com sinal) em cada um dos pontos, e calculmos a média:

$$\bar{k}_n = \frac{k(P_1) + \cdots + k(P_n)}{n}$$

- Pegamos n maior e refazemos as contas.



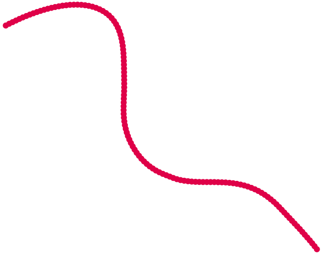
$n = 72 \longrightarrow \bar{k}_{72} = -3.771$

Curvatura média: a solução

- Tomamos n pontos *igualmente espaçados* sobre a curva: P_1, P_2, ..., P_n.
- Determinamos as curvaturas (com sinal) em cada um dos pontos, e calculmos a média:

$$\bar{k}_n = \frac{k(P_1) + \cdots + k(P_n)}{n}$$

- Pegamos n maior e refazemos as contas.
- A medida que n aumenta, as médias $\bar{k}_n$ se aproximam mais e mais de um valor *limite* $\boxed{\bar{k}_\infty}$, que é a verdadeira curvatura média.



$$n = 144 \longrightarrow \bar{k}_{144} = -3.773$$

Exemplo: círculos

Começamos com um exemplo fácil: úm círculo de raio r, percorrido no sentido anti-horário.

Exemplo: círculos

Começamos com um exemplo fácil: úm círculo de raio r, percorrido no sentido anti-horário. Em cada ponto a curvatura (com sinal) é $+1/r$, portanto as curvaturas médias aproximadas usando n pontos $\bar{k}_n$ têm todas o mesmo valor $1/r$.

Exemplo: círculos

Começamos com um exemplo fácil: úm círculo de raio r, percorrido no sentido anti-horário. Em cada ponto a curvatura (com sinal) é $+1/r$, portanto as curvaturas médias aproximadas usando n pontos $\bar{k}_n$ têm todas o mesmo valor $1/r$. Logo a "verdadeira" média é $\bar{k}_\infty = 1/r$.

Exemplo: círculos

Começamos com um exemplo fácil: úm círculo de raio r, percorrido no sentido anti-horário. Em cada ponto a curvatura (com sinal) é $+1/r$, portanto as curvaturas médias aproximadas usando n pontos $\bar{k}_n$ têm todas o mesmo valor $1/r$. Logo a "verdadeira" média é $\bar{k}_\infty = 1/r$. Como o comprimento do círculo é $\ell = 2\pi r$, também vale a fórmula

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\ell}\,.$$

Calcular a curvatura média pode ser muito fácil

A fórmula da curvatura média que vimos para o círculo

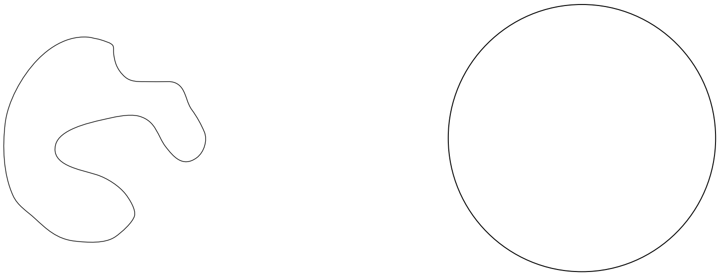
$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\ell}$$

Calcular a curvatura média pode ser muito fácil

A fórmula da curvatura média que vimos para o círculo

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\ell}$$

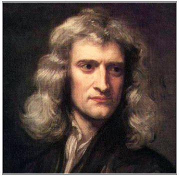
na verdade vale para qualquer curva fechada simples de comprimento ℓ*, percorrida no sentido anti-horário*.



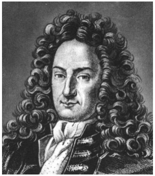
Obs: Isso certamente não funcionaria se não contássemos o sinal da curvatura!

Nossos heróis

Tudo que foi dito até agora se define precisamente, se calcula, e se demonstra usando CÁLCULO.



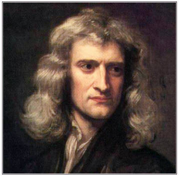
Newton (1643–1727)



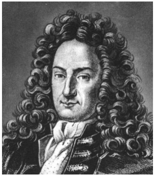
Leibniz (1646–1716)

Nossos heróis

Tudo que foi dito até agora se define precisamente, se calcula, e se demonstra usando CÁLCULO.



Newton (1643–1727)



Leibniz (1646–1716)

- O "círculo osculador" (*circulum osculans*) foi assim batizado por Leibniz.
- Newton explicou como calcular a curvatura (e muitas outras coisas) em sua obra-prima *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

Cálculo

Newton inventou o Cálculo para expressar as leis da natureza.
Sem Cálculo, é impossível realmente entender as Leis de Newton, ou a Física em geral.

Cálculo

Newton inventou o Cálculo para expressar as leis da natureza.
Sem Cálculo, é impossível realmente entender as Leis de Newton, ou a Física em geral.

O Cálculo tem duas faces:

- O *Cálculo Diferencial* trata de informações *locais*. Exemplo: para saber a reta tangente ou a curvatura de uma curva em um ponto P não precisamos conhecer toda a curva; um pedacinho em volta de P é o suficiente.

Cálculo

Newton inventou o Cálculo para expressar as leis da natureza.
Sem Cálculo, é impossível realmente entender as Leis de Newton, ou a Física em geral.

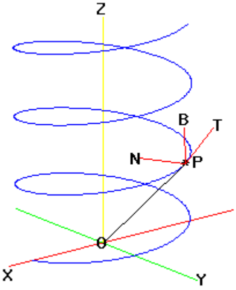
O Cálculo tem duas faces:

- O *Cálculo Diferencial* trata de informações *locais*. Exemplo: para saber a reta tangente ou a curvatura de uma curva em um ponto P não precisamos conhecer toda a curva; um pedacinho em volta de P é o suficiente.
- O *Cálculo Integral* trata de informações *globais*. Exemplo: para determinar o comprimento ou a curvatura média de uma curva é necessário conhecer a curva inteira.

Essas duas faces se complementam.

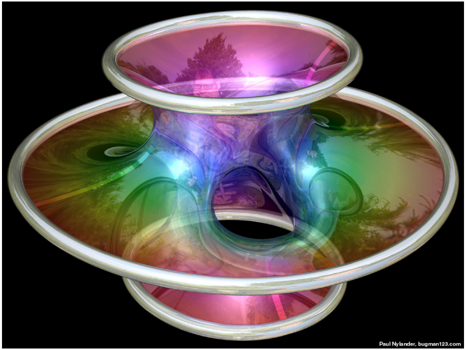
Vamos para dimensão 3

Curvas no espaço



Conceitos de curvatura, *torção* . . .
Não vamos entrar nisso . . .

Superfícies no espaço



Superfície de Costa

Costa, Celso J.

Example of a complete minimal immersion in $\mathbf{R}^3$ of genus one and three embedded ends.

Bol. Soc. Brasil. Mat. 15 (1984), p. 47–54.

Superfícies: curvatura?

Gauss descobriu o conceito apropriado de curvatura para superfícies.

Obs: Na verdade existem vários conceitos de curvatura para superfícies, mas a gaussiana é a mais interessante.

Gauss (1777–1855)

Talvez o maior matemático de todos os tempos.

Superfícies: curvatura?

Gauss descobriu o conceito apropriado de curvatura para superfícies.

Obs: Na verdade existem vários conceitos de curvatura para superfícies, mas a gaussiana é a mais interessante.

Gauss (1777–1855)

Talvez o maior matemático de todos os tempos.

A curvatura gaussiana de uma superfície S em um ponto P é um número K. Não vamos defini-lo precisamente (apesar de não ser muito difícil), mas vamos dar uma idéia do que ela significa.

Curvatura positiva

A curvatura de uma esfera de raio r vale $\boxed{K = 1/r^2}$ em todos os pontos.

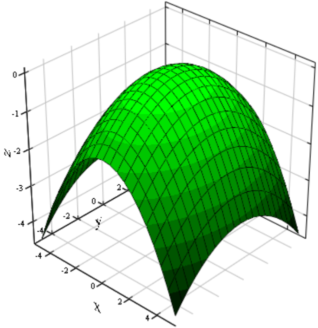
Obs: Infelizmente, o conceito de "esfera osculadora" não é muito frutífero: nem todas as superfícies se parecem (mesmo localmente) com esferas. **:(**

Curvatura positiva

A curvatura de uma esfera de raio r vale $\boxed{K = 1/r^2}$ em todos os pontos.

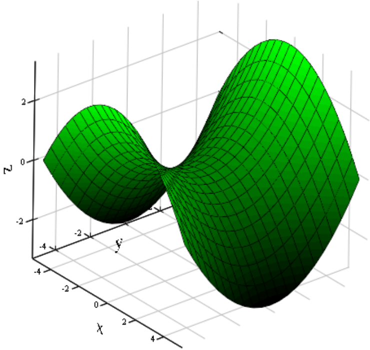
Obs: Infelizmente, o conceito de "esfera osculadora" não é muito frutífero: nem todas as superfícies se parecem (mesmo localmente) com esferas. **:(**

Se a superfície ao redor de P se parece com a abaixo, então a curvatura K é *positiva* em P:



Curvatura negativa

Se a superfície ao redor de P se parece com uma *sela*, então a curvatura K é *negativa* em P:

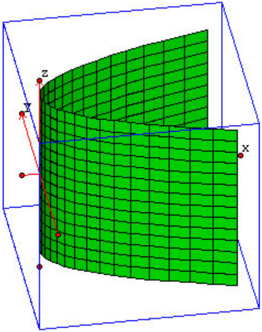


Curvatura negativa

Se a superfície ao redor de P se parece com uma *sela*, então a curvatura K é *negativa* em P:

Curvatura zero

Se a superfície ao redor de P se parece com um *plano*, *cilindro*, *cone*, ou qualquer coisa que possa ser obtida dobrando uma folha de papel, então a curvatura K é *zero* em P:



Exemplo

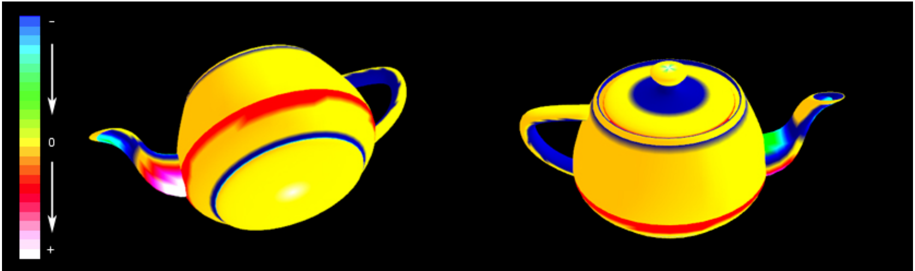


Figure 4. Gaussian curvature values at each vertex, mapped onto the teapot surface.

Figure 5. Gaussian curvature values at each vertex, mapped onto the teapot surface, different perspective.

http://stevezero.com/eecs/cs294proj1

Curvatura média

Agora que "sabemos" o que é curvatura K em cada ponto P, podemos imitar o que fizemos antes e definir o que é a *curvatura média* $\bar{K}$ de uma superfície inteira S.

Cuidado: também se usa a expressão "curvatura média" com um sentido totalmente diferente.

Algum jeito fácil de encontrar a curvatura média?

Lembremos da fórmula da curvatura média de uma curva fechada simples:

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\ell} \qquad \text{onde } \ell = \text{ compr. da curva.}$$

Algum jeito fácil de encontrar a curvatura média?

Lembremos da fórmula da curvatura média de uma curva fechada simples:

$$\bar{k} = \frac{2\pi}{\ell} \qquad \text{onde } \ell = \text{ compr. da curva.}$$

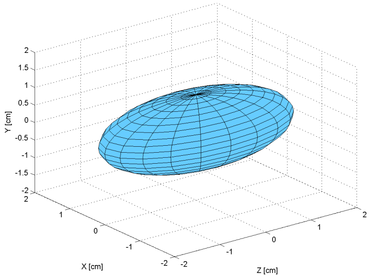
Vale uma fórmula similar para a curvatura média de uma superfície fechada:

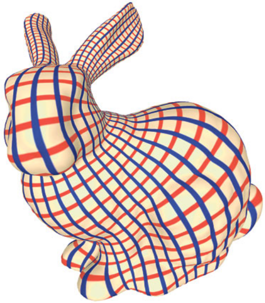
$$\bar{K} = \frac{4\pi}{A} \qquad \text{onde } A = \text{ área da superfície.}$$

mas. . .

Entra a topologia

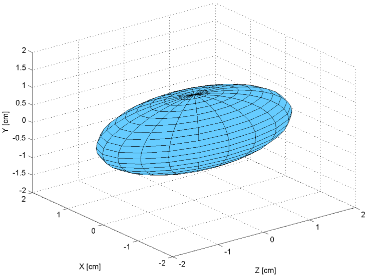
A fórmula $\bar{K} = \frac{4\pi}{A}$ só funciona para superfícies que se "pareçam" com uma esfera:

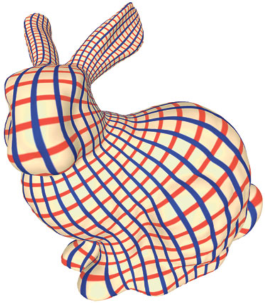




Entra a topologia

A fórmula $\bar{K} = \frac{4\pi}{A}$ só funciona para superfícies que se "pareçam" com uma esfera:

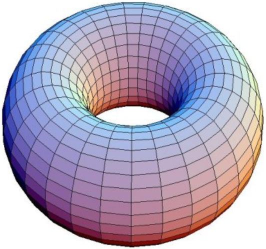




Obs: Se podemos deformar uma superfície S_1 para obter a superfície S_2, então dizemos que S_1 e S_2 tem a mesma *topologia*.

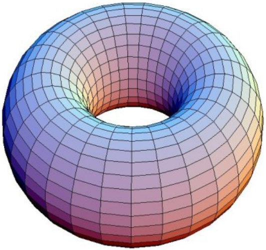
Não-esferas

Um exemplo de superfície fechada com topologia diferente da esfera é toro:



Não-esferas

Um exemplo de superfície fechada com topologia diferente da esfera é toro:



Para essas superfícies, em vez da fórmula $\bar{K} = \frac{4\pi}{A}$, temos simplesmente:

$$\bar{K} = 0.$$

A curvatura negativa e a curvatura positiva se cancelam exatamente!

E muito mais além

RIEMANN descobriu a curvatura para "superfícies" de dimensão 3 ou mais.

E muito mais além

RIEMANN descobriu a curvatura para "superfícies" de dimensão 3 ou mais.

POINCARÉ fez uma conjectura sobre quais superfícies de dim. 3 são de tipo esférico.

E muito mais além

RIEMANN descobriu a curvatura para "superfícies" de dimensão 3 ou mais.

POINCARÉ fez uma conjectura sobre quais superfícies de dim. 3 são de tipo esférico.

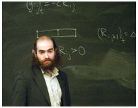
THURSTON fez uma conjectura ainda mais difícil, cobrindo todas as superfícies de dim. 3.

E muito mais além

RIEMANN descobriu a curvatura para “superfícies” de dimensão 3 ou mais.

POINCARÉ fez uma conjectura sobre quais superfícies de dim. 3 são de tipo esférico.

THURSTON fez uma conjectura ainda mais difícil, cobrindo todas as superfícies de dim. 3.



Em 2002, PERELMAN provou as conjecturas de Poincaré e Thurston. A fundação Clay oferecia um prêmio de um milhão de dólares para quem resolvesse o problema, mas Perelman recusou.

Conclusão

- Sabemos hoje muito mais geometria que os gregos.
- Porém o teorema de Pitágoras e as demais descobertas matemáticas dos gregos continuam valendo. (Não se pode dizer o mesmo sobre outras áreas. . .)
- O que quer que se descubra nos próximos milênios, a curvatura total da superfície de um toro continuará sendo zero.