

A Métrica de Hilbert e Aplicações

Paulo Orenstein

Trabalho de Iniciação Científica
Orientador: Jairo Bochi
Departamento de Matemática, PUC-Rio
26 de agosto de 2009

1 Preliminares

1.1 Espaços métricos completos

Definição 1.1. Uma *métrica* num conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Definição 1.2. A bola de centro a e raio r num espaço métrico (X, d) é o conjunto $B(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}$.

Definição 1.3. O *diâmetro* de um espaço subconjunto limitado não-vazio A de um espaço métrico (X, d) é dado por $\text{diam } A = \sup\{d(x, y); x, y \in A\}$.

Definição 1.4. Um *espaço métrico* é um conjunto munido de uma métrica.

Definição 1.5. Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ um subconjunto deste espaço. Chamamos de *fecho* de A o conjunto \bar{A} dos pontos $x \in X$ tais que, $\forall r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Definição 1.6. A *fronteira* de um conjunto X é a parte comum ao fecho de A e seu complementar, *ie.* $Fr(A) = \bar{A} - A$. Também denotamos a fronteira de um conjunto A por ∂A .

Definição 1.7. Dado uma sequência de pontos $\{x_n\}$, dizemos que x_n converge para x se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um N tal que se $n > N$ então $|x_n - x| < \epsilon$.

Definição 1.8. Uma sequência de pontos x_1, x_2, x_3, \dots em um espaço métrico é dita *de Cauchy* se, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que $d(p_n, p_m) < \epsilon$ para quaisquer $m, n > N$.

Definição 1.9. Um espaço métrico (X, d) é dito *completo* se toda sequência de Cauchy de pontos de X converge para um ponto de X .

1.2 Contrações

Definição 1.10. Dado um espaço métrico (X, d) , uma função $T : X \rightarrow X$ é chamada uma *contração* se existe um λ com $0 < \lambda < 1$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Se X é um espaço métrico compacto e $T : X \rightarrow X$ é uma contração, então T tem um único ponto fixo, \bar{x} . Além disso, para qualquer $x_0 \in X$, a sequência (x_n) definida indutivamente por $x_{n+1} = T(x_n)$ converge para \bar{x} .*

Demonstração. A prova é simples e pode ser encontrada em qualquer livro de espaços métricos. \square

1.3 Convexidade

Definição 1.11. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se, para todo $x, y \in X$ e para qualquer $t \in [0, 1]$, o ponto $(1 - t)x + ty$ está em X .

Definição 1.12. Um conjunto não-vazio $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um *bom convexo* se possui as seguintes propriedades:

1. C é convexo.
2. C é limitado.
3. Existe um subespaço afim $H \subset \mathbb{R}^n$ contendo C tal que C é aberto relativamente a H .

Observação 1.13. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma bijeção afim. Se C é um bom convexo, então $T(C)$ é um bom convexo.

2 A Métrica de Hilbert

2.1 Dimensão 1

Lembramos que a função tangente hiperbólica, dada por

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

é uma bijeção contínua de \mathbb{R} sobre o intervalo $(-1, 1)$, com inversa

$$\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}, \quad y \in (-1, 1).$$

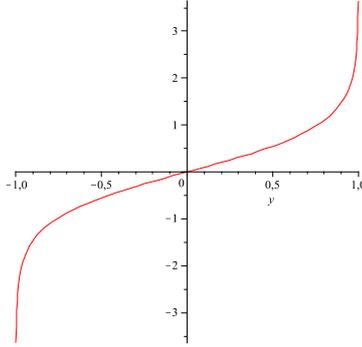


Figura 1: A função arco-tangente hiperbólica.

Definição 2.1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto limitado, e seja f a única bijeção afim crescente de I para $(-1, 1)$. A *métrica de Hilbert* d_I em I é definida por:

$$d_I(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} f(x) - \operatorname{arctanh} f(y)|.$$

Evidentemente as condições da definição 1.1 são satisfeitas.

Vamos achar uma fórmula mais simples para d_I : Consideramos $I = (a, b)$ um intervalo aberto limitado qualquer. Seja $f(z) = \alpha z + \beta$, e escolhamos α e β para ter $f(a) = -1$ e $f(b) = 1$, isto é,

$$\alpha = \frac{2}{b-a} \quad e \quad \beta = \frac{a+b}{a-b}$$

Portanto, f é uma (e, de fato, a única) bijeção afim crescente de I para $(-1, 1)$. Temos que:

$$d_I(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} f(y) - \operatorname{arctanh} f(x)|$$

Portanto:

$$\begin{aligned} d_{(a,b)}(x, y) &= 2 \left| \operatorname{arctanh} \left(\frac{2y - a - b}{b - a} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right) \right| \\ &= \left| \log \left(\frac{2y - 2a}{2b - 2y} \cdot \frac{2b - 2x}{2x - 2a} \right) \right| \end{aligned}$$

Finalmente, supomos sem perda que $a < x < y < b$,

$$d_{(a,b)}(x, y) = \log \left(\frac{y-a}{x-a} \cdot \frac{b-x}{b-y} \right)$$

Observação 2.2. A expressão entre parênteses é chamada o *cross ratio* dos pontos a, x, y, b .

Observação 2.3. Note que esta quantidade é decrescente como função de a ou de x , e crescente como função de b ou de y .

Observação 2.4. Dado um segmento de reta I no espaço \mathbb{R}^n , também podemos definir a métrica de Hilbert em I : basta usar uma parametrização afim do segmento.

2.2 Princípio do Observador

Teorema 2. *Considere dois segmentos (a, b) e (a', b') no plano. Fixe um ponto O fora das retas que contêm esses segmentos. Seja $x, y \in (a, b)$ e $x', y' \in (a', b')$ tais que O, x, x' são colineares e O, y, y' são colineares (vide figura 1). Então:*

$$d_{(a,b)}(x, y) = d_{(a',b')}(x', y')$$

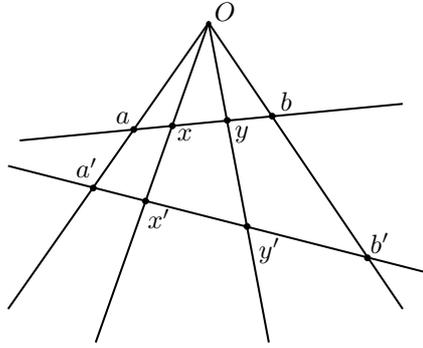


Figura 2: Invariância da Métrica de Hilbert: $d_{(a,b)}(x, y) = d_{(a',b')}(x', y')$.

Demonstração. Seja h como na figura 3. A área do triângulo Oax pode ser expressa como:

$$\frac{1}{2} \cdot \|x - a\| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle(Ox, Oa) \cdot \|Ox\| \cdot \|Oa\|$$

Sabemos que:

$$\exp d_{(a,b)}(x, y) = \frac{\|y - a\|}{\|x - a\|} \cdot \frac{\|b - x\|}{\|b - y\|}$$

Portanto,

$$\exp d_{(a,b)}(x, y) = \frac{\sin \angle(Oy, Oa) \cdot \|Oy\| \cdot \|Oa\|}{\sin \angle(Ox, Oa) \cdot \|Ox\| \cdot \|Oa\|} \cdot \frac{\sin \angle(Ox, Ob) \cdot \|Ox\| \cdot \|Ob\|}{\sin \angle(Oy, Ob) \cdot \|Oy\| \cdot \|Ob\|}$$

Donde segue que:

$$d_{(a,b)}(x, y) = \log \left(\frac{\sin \angle(Oy, Oa)}{\sin \angle(Ox, Oa)} \cdot \frac{\sin \angle(Ox, Ob)}{\sin \angle(Oy, Ob)} \right)$$

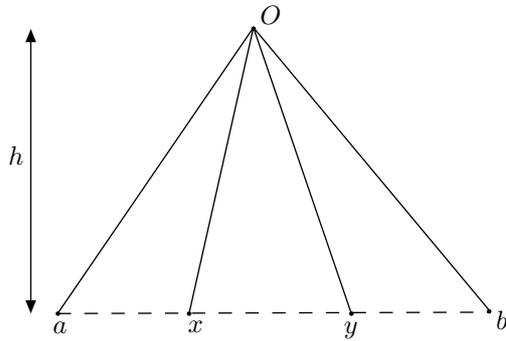


Figura 3: Invariância da Métrica de Hilbert.

Logo, a distância pode ser calculada através dos ângulos, apenas. Como estes ângulos não se alteram substituindo-se a, x, y, b por a', x', y', b' concluímos que vale o teorema. \square

Adendo 3. Na situação da figura 4, continua valendo a fórmula $d_{(a,b)}(x, y) = d_{(a',b')}(x', y')$. Esta propriedade pode ser obtida do teorema 2 fazendo o ponto O tender a infinito.

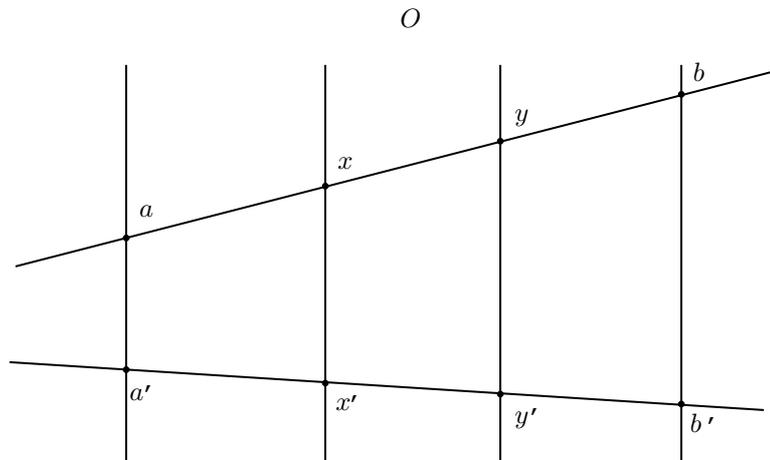


Figura 4: O Caso do Observador no Infinito.

Observação 2.5. O teorema expressa a invariância da métrica de Hilbert por transformações projetivas.

2.3 Dimensão n

Definição 2.6. Considere um bom convexo $C \in \mathbb{R}^n$. Vamos definir d_C , a métrica de Hilbert em C . Trace a reta r em \mathbb{R}^n que passa por dois pontos $x, y \in C$ e chame de a e b os pontos pertencentes à fronteira de C tal que $a, b \in C \cap r$, como na figura 5.

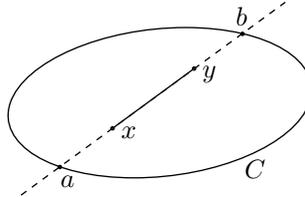


Figura 5: Dimensão n .

Então a distância entre x e y dada pela métrica de Hilbert se reduz ao caso unidimensional, e é definida por

$$d_C(x, y) = d_{(a,b)}(x, y)$$

É claro que as condições 1 e 2 da definição 1.1 são satisfeitas; porém a condição 3 não é trivial e necessita de uma prova. Antes disso, fazemos duas observações.

Observação 2.7. Repare que se $x, y, z \in C$ estão alinhados e y está entre x e z (como mostra a figura 6), então vale a *propriedade da retidão*, ie.:

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

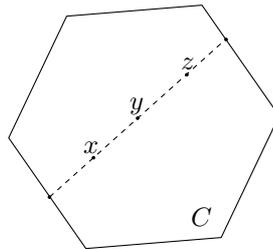


Figura 6: Propriedade da Retidão

Observação 2.8. Pelas propriedades da métrica de Hilbert, é fácil deduzir que:

$$y \rightarrow \partial C \implies d_C(x, y) \rightarrow \infty$$

Teorema 4 (Desigualdade Triangular). *Dado um bom convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ e três pontos $x, y, z \in C$ quaisquer, vale que:*

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

Demonstração. Fixe três pontos x, y, z em C . Podemos supor que não são colineares. Seja (a, b) , respectivamente (c, d) , (h, g) , o maior segmento contido em C contendo (x, y) , respectivamente (y, z) , (x, z) . Considere as retas que contêm os segmentos (a, c) e (b, d) . Suponha que essas retas se intersectam em um ponto O (o caso de retas paralelas é análogo, usando o adendo 3). Sejam os pontos w, e, f e o quadrilátero L como na figura 7.

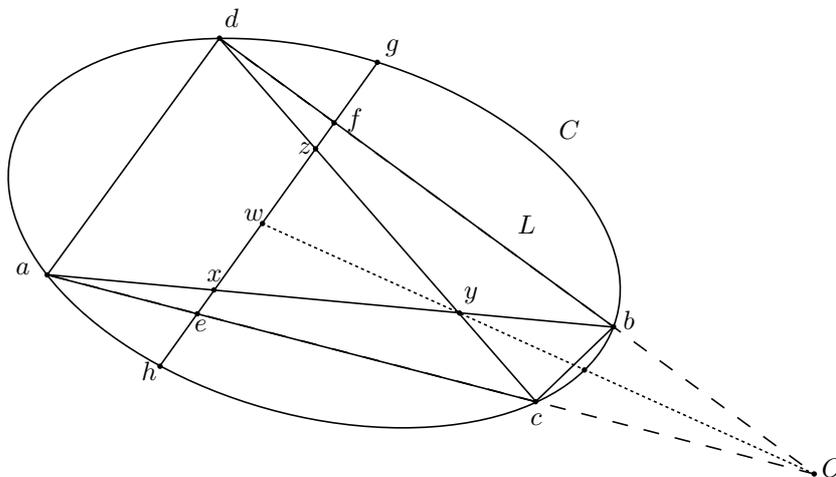


Figura 7: Desigualdade Triangular

Pelo teorema 2,

$$d_C(x, y) = d_{(a,b)}(x, y) = d_{(e,f)}(x, w)$$

Analogamente,

$$d_C(y, z) = d_{(e,f)}(w, z)$$

Pela propriedade da retidão:

$$d_C(x, y) + d_C(y, z) = d_{(e,f)}(x, w) + d_{(e,f)}(w, z) = d_{e,f}(x, z) = d_L(x, z)$$

Como $(h, g) \supset (e, f)$, temos que, pela definição da métrica de Hilbert e pela observação 2.3, $d_L(x, z) \geq d_C(x, z)$. Disso segue, finalmente, que:

$$d_C(x, y) + d_C(y, z) = d_L(x, z) \geq d_C(x, z). \quad \square$$

2.4 Completude

Teorema 5. *Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é um bom convexo então o espaço métrico (C, d_C) é completo.*

Demonstração. Para mostrar que um espaço métrico é completo, é suficiente mostrar que toda sequência de Cauchy possui uma subsequência que converge.

Seja C um bom convexo. Tome uma sequência x_1, x_2, \dots em C que é de Cauchy em relação à métrica d_C . Seja z um ponto de acumulação desta sequência em relação à métrica euclidiana. Então $z \in \bar{C}$.

Vejamus que necessariamente $z \in C$, isto é, z não pode estar na fronteira de C . Fixando $\epsilon = 1$ na definição de sequência de Cauchy, obtemos que $\exists N$ tal que $x_n \in B(x_N, 1) \forall n > N$. O fecho euclidiano de qualquer bola na métrica d_C não intersecta a fronteira de C . Assim, vale $z \notin Fr(C)$, como tínhamos afirmado.

Se x_{n_1}, x_{n_2}, \dots é uma sequência que converge na métrica euclidiana a $z \in C$, então também vale convergência na métrica de Hilbert; isso é consequência da fórmula para d_C . \square

2.5 Invariância por Transformações Afins

Teorema 6. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma bijeção afim, isto é, uma bijeção da forma $T(x) = L(x) + b$ onde L é linear. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um bom convexo. Então*

$$d_C(x, y) = d_{T(C)}(T(x), T(y)) \quad \forall x, y \in C.$$

Demonstração. Suponha um bom convexo C , e os pontos $a, x, y, b \in C$ (como na figura 8). Considere também a transformação afim T , com os respectivos pontos $T(a), T(x), T(y), T(b) \in T(C)$. Tome como f a função afim que leva pontos de (a, b) em $(-1, 1)$ e a função g que leva os pontos de $T((a, b))$ em $(-1, 1)$.

Então $g \circ T = f$. Disso segue que:

$$\begin{aligned} d_{T(C)}(T(x), T(y)) &= d_{(T(a), T(b))}(T(x), T(y)) \\ &= 2|\operatorname{arctanh} g(T(x)) - \operatorname{arctanh} g(T(y))| \\ &= 2|\operatorname{arctanh} f(x) - \operatorname{arctanh} f(y)| \\ &= d_{(a,b)}(x, y) \\ &= d_C(x, y). \end{aligned} \quad \square$$

3 Desigualdade de Birkhoff

Teorema 7. *Sejam C e D bons convexos. Se $\bar{C} \subset D$, então*

$$d_D(x, y) \leq \lambda d_C(x, y) \quad \forall x, y \in C$$

onde $\lambda = \tanh \frac{1}{4} \operatorname{diam}_{d_D} C < 1$.

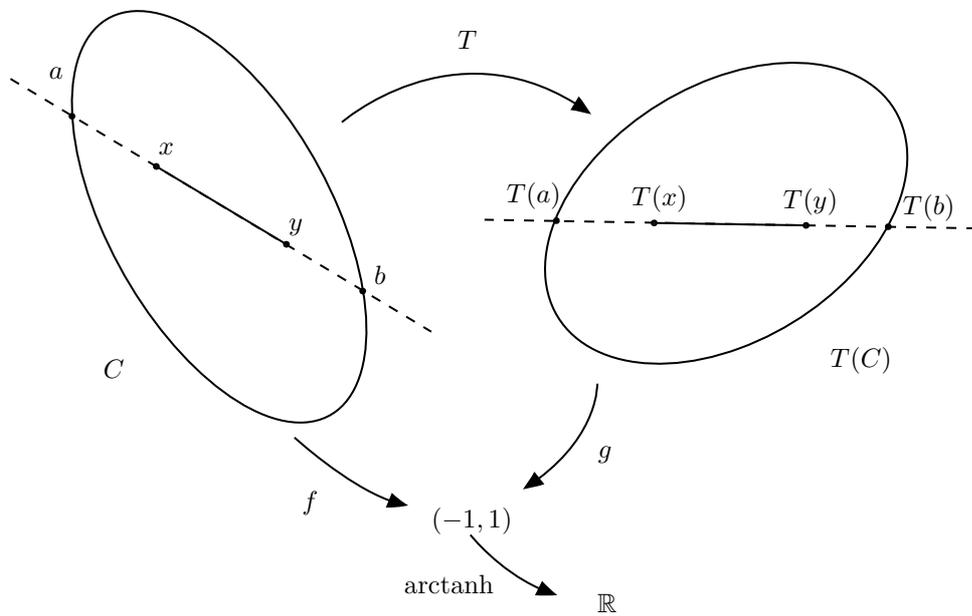


Figura 8: Invariância por Transformações Lineares.

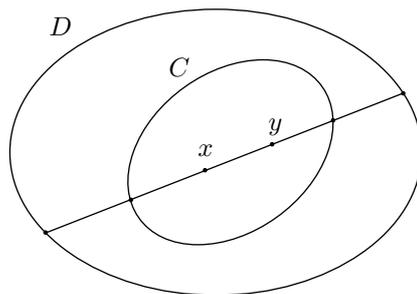


Figura 9: Desigualdade de Birkhoff.

Demonstração. Provaremos o teorema por casos. Primeiramente provaremos que o teorema vale para intervalos centrados. Em seguida provaremos para intervalos quaisquer. Finalmente, provaremos o caso geral.

1º caso. Suponha que os bons convexos $C \in D$ são segmentos de mesmo centro euclidiano. Podemos aplicar uma transformação afim nos conjuntos de forma a levar D no intervalo $(-1, 1)$ e C no intervalo $(-a, a)$ com $0 < a < 1$. Por simplicidade, escreveremos $D = (-1, 1)$ e $C = (-a, a)$. Seja $x, y \in (-a, a)$, com $x < y$. Então para D temos que:

$$d_{(-1,1)}(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} y - \operatorname{arctanh} x|$$

Lembrando que $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$, temos que

$$2|\operatorname{arctanh} y - \operatorname{arctanh} x| = 2 \cdot \int_x^y \frac{1}{1-z^2} dz$$

Chamemos de $h(z)$ a função $\frac{1}{1-z^2}$.

Agora para C temos:

$$d_{(-a,a)}(x, y) = 2|\operatorname{arctanh} f(y) - \operatorname{arctanh} f(x)|$$

onde $f(z) = \frac{z}{a}$, pela definição 2.1. Portanto,

$$2|\operatorname{arctanh} f(y) - \operatorname{arctanh} f(x)| = 2 \cdot \int_{a^{-1}x}^{a^{-1}y} \frac{1}{1-w^2} dw = 2 \cdot \int_x^y \frac{a^{-1}}{1-z^2 a^{-2}} dz$$

Chamemos de $g(z)$ a função $\frac{a^{-1}}{1-z^2 a^{-2}}$.

Note que:

$$p(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{1-z^2 a^{-2}}{a^{-1}(1-z^2)} = a \cdot \left(\frac{1-\frac{z^2}{a^2}}{1-z^2} \right)$$

E como $0 < a < 1$, segue que $\max p(z) = p(0) = a$ e, portanto,

$$h(z) \leq a g(z).$$

Integrando de x a y obtemos $d_D(x, y) \leq a \cdot d_C(x, y)$.

Observação 3.1. Repare que, neste caso, o λ da fórmula de Birkhoff vale a , pois $\operatorname{diam}_{d_D} C = 2(\operatorname{arctanh}(a) - \operatorname{arctanh}(-a)) = 4 \operatorname{arctanh}(a)$.

2º caso. Consideramos um caso mais geral onde os bons convexos D e C são segmentos *quaisquer*, com $\overline{C} \subset D$. Vamos reduzir este caso ao anterior usando o Princípio do Observador, (*ie.* teorema 2).

Sejam a e b os pontos extremos do intervalo D , e sejam a' e b' os pontos extremos do intervalo C , como mostra a figura 10. Chame de z o ponto central

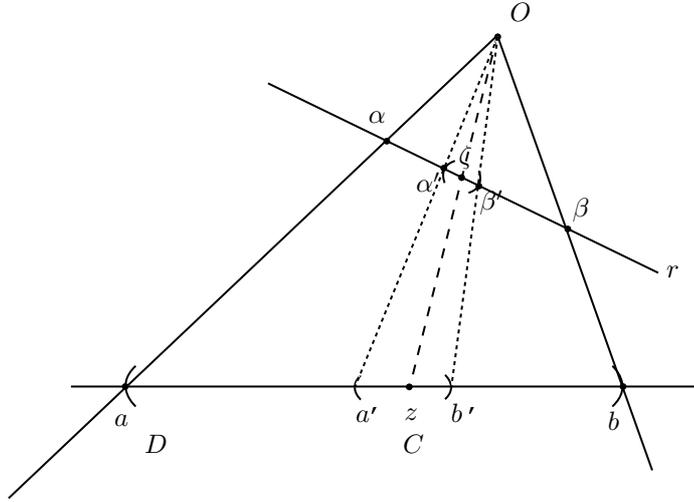


Figura 10: 2º Caso da Desigualdade de Birkhoff.

do intervalo C em relação à métrica d_D , ie. $d_D(a', z) = d_D(z, b')$, e seja O um ponto fora da reta que contém D tal que $\angle(Oa, Oz) = \angle(Oz, Ob)$.

Seja r uma reta que corta a reta Oz ortogonalmente em um ponto ζ . Seja α (respectivamente α', β', β) a interseção da reta r com a reta Oa (respectivamente Oa', Ob', Ob). Então os segmentos (α, β) e (α', β') têm o mesmo centro euclidiano, a saber ζ . Como o caso para intervalos centrados já foi provado, provamos, por conseguinte, sua generalização.

3º caso. Para provar o caso geral, tome dois bons convexos D e C , com $\overline{C} \subset D$. Considere dois pontos $x, y \in C$, e a interseção da reta passando por esses pontos com ∂C e ∂D , que chamaremos de a, b e α, β respectivamente (como na figura 11).

Então basta notar que:

$$\begin{aligned}
 d_D(x, y) &= d_{(\alpha, \beta)}(x, y) && \text{(por definição)} \\
 &\leq \left[\tanh \frac{1}{4} \text{diam}_{d_{(\alpha, \beta)}}(a, b) \right] d_{(a, b)}(x, y) && \text{(pelo 2º caso)} \\
 &\leq \left[\tanh \frac{1}{4} \text{diam}_{d_{(\alpha, \beta)}}(a, b) \right] d_C(x, y) && \text{(por definição)} \\
 &\leq \left[\tanh \frac{1}{4} \text{diam}_{d_D} C \right] d_C(x, y)
 \end{aligned}$$

O último passo se justifica pois $\text{diam}_{d_D} C$ é dado pelo supremo da distância entre dois pontos quaisquer em C , não necessariamente em (a, b) . Isto fica ilustrado na figura 11 pelo segmento de reta pontilhado.

□

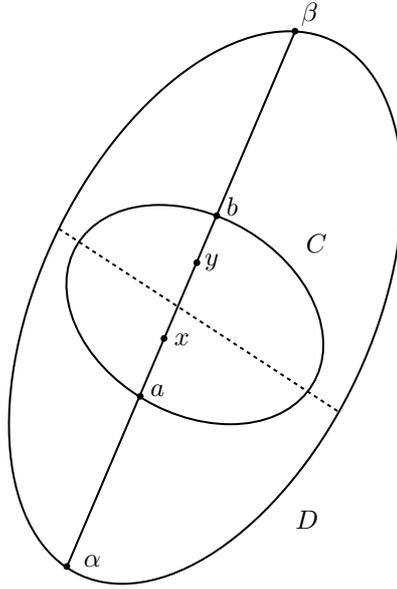


Figura 11: 3º Caso da Desigualdade de Birkhoff.

Teorema 8 (Propriedade da Contração por Transformações Lineares). *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^m$ bons convexos. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear tal que $\overline{T(C)} \subset D$. Então existe $\lambda < 1$ tal que $d_D(T(x), T(y)) \leq \lambda d_C(x, y), \forall x, y \in C$.*

Observação 3.2. No caso em que $D = C$, a restrição de T a C define uma contração na métrica d_C .

Demonstração. Seja λ dado pela Fórmula de Birkhoff para o par de convexos $D \supset \overline{T(C)}$. Então $\forall x, y \in C$,

$$d_D(T(x), T(y)) \leq \lambda d_{T(C)}(T(x), T(y))$$

Pela invariância para transformações lineares (teorema 6),

$$d_{T(C)}(T(x), T(y)) = d_C(x, y)$$

Isso prova o teorema. □

4 Teorema de Perron-Frobenius e Aplicações

Nesta seção iremos desenvolver os raciocínios teóricos de maneira mais informal, tendo em vista algumas aplicações.

4.1 Passeios Aleatórios

Vamos tratar, inicialmente, de um passeio aleatório em um ambiente finito. Se um indivíduo está na célula j no tempo t , então ele pula (no tempo $t + 1$) para uma das células $1, 2, \dots, n$, sendo que a probabilidade do indivíduo pular para a célula i é dada por p_{ij} .

Definição 4.1. Uma matriz é dita *matriz coluna-estocástica* se:

1. $p_{ij} \geq 0$;
2. $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$;

Definição 4.2. Chamamos de *simplexo standard* $(n - 1)$ dimensional aberto o conjunto $\Delta = \{(x_1, \dots, x_n); x_i > 0 \forall i; \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1\}$.

Definição 4.3. Chamamos de *simplexo standard* $(n - 1)$ dimensional fechado o conjunto $\bar{\Delta} = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \geq 0 \forall i; \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1\}$.

Proposição 4.4. O *simplexo standard* fechado é invariante por qualquer matriz coluna-estocástica, ie. $M(\bar{\Delta}) \subseteq \bar{\Delta}$.

Demonstração. Queremos provar que, se aplicarmos M a um vetor, o vetor resultante estará dentro do *simplexo standard* fechado. Assim, se $M(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, queremos mostrar que $(y_1, \dots, y_n) \in \bar{\Delta}$.

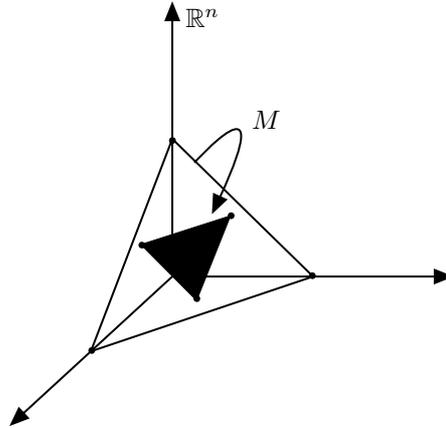


Figura 12: O *simplexo standard* fechado é invariante por M .

Considere um ponto $(x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Delta}$. Para mostrar que y estará dentro do *simplexo*, precisamos atender às duas condições da definição 4.3. A primeira é trivial pois, como p_{ij} e x_j são não-negativos, segue que:

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \geq 0$$

Para provar a segunda condição, reparamos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} \right) x_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j = 1 \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{y} = M\mathbf{x} \in \bar{\Delta}$. □

Agora será possível entender como funcionará o caminho do indivíduo não só no tempo $t = 1$, mas também quando $t = 2, t = 3, \dots$. Para tanto, precisaremos calcular a matriz M multiplicada por si mesma várias vezes.

Observação 4.5. Indicaremos M^k por $(p_{ij}^{(k)})$.

Dessa forma, $p_{ij}^{(k)}$ é a probabilidade do indivíduo estar na célula i no tempo k , dado que ele estava na célula j no tempo 0.

4.2 Matrizes Irredutíveis

Definição 4.6. Uma matriz coluna-estocástica $M = (p_{ij})$ é chamada *irredutível* se $\exists k \geq 1$ tal que $p_{ij}^{(k)} > 0 \forall i, j$.

Observação 4.7. Usaremos matrizes irredutíveis para garantir que, depois do tempo k , o indivíduo possa estar em qualquer lugar.

4.3 Teorema de Perron-Frobenius para matrizes coluna-estocásticas

Teorema 9. Se M é coluna-estocástica irredutível, então existe um único $v_* \in \Delta$ tal que $M(v_*) = v_*$ (ou seja, um ponto fixo). Além disso, $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(v) = v_*$ para qualquer $v \in \Delta$ (ou seja, o ponto fixo é atrator).

Observação 4.8. v_* é autovetor de M com autovalor 1.

Demonstração. Se $k = 1$, o teorema sai direto da Propriedade da Contração para Transformações Lineares (teorema 6).

Para k qualquer, seja v_* o único vetor em Δ tal que $M^k(v_*) = v_*$. Sabemos que $M^{kn}(v) \rightarrow v_* \forall v \in \Delta$ quando $n \rightarrow \infty$. Então

$$\begin{aligned}
M^{kn+1}(v) &= M^{kn}(Mv) \rightarrow v_* \\
M^{kn+2}(v) &= M^{kn}(M^2v) \rightarrow v_* \\
&\vdots \\
M^{kn+(n-1)}(v) &= M^{kn}(M^{n-1}v) \rightarrow v_*
\end{aligned}$$

Logo, $M^N(v) \rightarrow v_*$ quando $N \rightarrow \infty$. E, por continuidade,

$$M(v_*) = M(\lim M^n v) = \lim M^{n+1} v = v_*$$

Portanto, v_* é ponto fixo. □

4.4 Google e o PageRank

O Google é um site de buscas criado em 1998 por Sergei Brin e Lawrence Page. É atualmente a página mais visitada em toda a rede, atingindo até 300 milhões de buscas diárias. Nesta seção investigamos como funciona o algoritmo básico por trás do Google, chamado de PageRank, que ordena os resultados das buscas.

O Google guarda uma matriz coluna-estocástica que contém as probabilidades de um surfista aleatório, estando num site j , pular para um site i (através de um link). O ponto fixo desta matriz de probabilidades constitui o vetor do PageRank.

As componentes desta matriz são dadas pela seguinte fórmula:

$$p_{ij} = \frac{1 - \delta}{n} + \delta \cdot \frac{\epsilon_{ij}}{k_j}$$

onde n é o número de sites da internet, k_j é o número de links no site j , ϵ_{ij} é uma função que vale 1 se j apontar para i e 0 caso contrário, e δ é o chamado "damping factor", que mede a chance de um indivíduo pular do site j para qualquer outro site da internet (que não necessariamente tem alguma relação). No caso do Google, eles usualmente colocam $\delta = 0.85$.

Observação 4.9. A matriz M composta por componentes p_{ij} é irredutível, já que, por conta do "damping factor", $p_{ij} > 0$, i.e. o surfista tem chance de visitar qualquer site, mesmo que não haja links apontando para ele.

Observação 4.10. A matriz M é coluna-estocástica, pois

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = (1 - \delta) + \delta \cdot \frac{1}{k_j} \cdot \sum_{i=1}^n \epsilon_{ij} = 1 - \delta + \delta = 1$$

Desta forma, o Google compõe uma matriz M , com as propriedades que estudamos em seções anteriores. Do teorema 9, segue que $\exists v_* \in \Delta$ tal que $Mv_* = v_*$. Este v_* representa o vetor PageRank, que possui todas as suas n

coordenadas entre 0 e 1. Quando qualquer pesquisa é efetuada, o Google organiza os resultados de acordo com os valores das coordenadas correspondentes de cada site.

Atualmente, o mecanismo do Google tornou-se muito mais complexo, levando em conta mais de 200 sinais para ordenar suas buscas – muitos dos quais são secretos¹. Descrevemos acima o funcionamento do melhor destes sinais, o PageRank. E, apesar da maior sofisticação hoje, em 1998 era justamente assim que o Google funcionava.

Referências

- [1] BIRKHOFF, Garrett. Extensions of Jentzsch's theorem. Trans. Amer. Math. Soc., v.85, p. 219-227, 1957.
- [2] BRIN, Sergey; PAGE, Lawrence. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. Computer Networks and ISDN Systems, v. 30, p. 107-117, 1998.
- [3] BUSEMANN, Herbert,; KELLY, Paul Joseph. Projective geometry and projective metrics. New York: Academic Press, 1953.
- [4] HILBERT, David. Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Math. Ann. 57, 137-150 (1903).

¹Veja www.google.com/corporate/tech.html