ALGUNS TóPICOS DE CONTAGEM E PROBABILIDADE

MAT1310 – 2010/1

O objetivo destas notas é ilustrar como a ideia de fazer *aproximações* permite uma compreensão melhor de diversos problemas de combinatória e probabilidade.

1. Princípio de Inclusão/Exclusão e aplicações

Lembre que $|A|$ indica o número de elementos de um conjunto finito A.

Sejam A_1, A_2, ... conjuntos finitos. O *Princípio de Inclusão/Exclusão* diz que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

e, em geral,

$$\boxed{|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|} \tag{1.1}$$

Demonstração. Seja x um elemento qualquer na união $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Digamos que ele pertence a exatamente ℓ dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$. Então ao fazer a soma $|A_1| + \cdots + |A_n|$, o elemento x é contado ℓ vezes: quer dizer, se x fosse removido, a soma descresceria de ℓ. Na soma $\sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$, o elemento x é contado $\binom{\ell}{2}$ vezes. Mais geralmente, na soma $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_j} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$, x é contado $\binom{\ell}{j}$ vezes (o que dá 0 se $j > \ell$). Levando em conta os sinais, o número de vezes que x é contado do lado direito da fórmula (1.1) é

$$\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} \binom{\ell}{j}.$$

Isso vale 1, pois pela fórmula do binômio temos

$$0 = (-1+1)^{\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \binom{\ell}{j} = 1 - \text{a expressão acima.}$$

Como cada elemento x é contado uma vez, a fórmula (1.1) é correta. □

Vejamos algumas aplicações do Princípio da Inclusão/Exclusão a problemas de probabilidade.

Problema 1.1. Um número é escolhido ao acaso entre 1 e 1000. Qual a probabilidade desse número não possuir nenhum divisor menor que 7?

Solução. Seja A_k o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por k. Vamos primeiro calcular a probabilidade do evento complementar, que é $A_2 \cup A_3 \cup A_5$. (Um número possui divisor menor que 7 se e somente se ele é divisível por 2, 3 ou 5.) Pelo princípio da inclusão/exclusão, temos

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$

Como 2 e 3 não tem fatores comuns, temos $A_2 \cap A_3 = A_{2\times 3} = A_6$. Analogamente, $A_2 \cap A_5 = A_{10}$ etc. Assim, a expressão acima fica:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_10| - |A_15| + |A_30|$$

Agora note que para qualquer k, o número de elementos do conjunto A_k é o quociente $1000/k$ *arredondado para baixo.* Esse valor é indicado por $\lfloor 1000/k \rfloor$. Assim temos:

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5| &= \lfloor 1000/2 \rfloor + \lfloor 1000/3 \rfloor + \lfloor 1000/5 \rfloor \\ &\qquad - \lfloor 1000/6 \rfloor - \lfloor 1000/10 \rfloor - \lfloor 1000/15 \rfloor + \lfloor 1000/30 \rfloor \\ &= 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 \\ &= 734. \end{aligned}$$

Dividindo pos 1000, temos que a probabilidade do número aleatório ser divisível por 2, 3, 5 é 0.734. Logo a probabilidade do número não ter divisor menor que 7 é $1 - 0.734 = 0.266$. □

Observação. Se nas contas acima não tivéssemos tido o cuidado de arredondar os quocientes para baixo, teríamos obtido uma resposta

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{3\times 5} - \frac{1}{2\times 3\times 5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right).$$

Esta resposta é errada, mas o erro é pequeno. Na verdade, o erro fica muito pequeno se no lugar de 1000 tomarmos um número muito grande.

Problema 1.2. Qual a probabilidade de um sorteio para amigo oculto com n pessoas dar certo, isto é, ninguém ter tirado a si próprio? Dê uma resposta exata, e uma resposta aproximada mais simples.

Solução. Seja Ω o conjunto de todos os possíveis sorteios. Temos $|\Omega| = n!$. Seja $A_k \subset \Omega$ o evento "a k-ésima pessoa retirou a si própria". O evento "o sorteio deu errado" é $A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Vamos calcular o número de elementos desse conjunto usando a fórmula (1.1). Note que existem $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher números $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 e n. Para cada uma dessas escolhas, temos $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$. Substituindo isso em (1.1), temos o números de sorteios que dão errado é

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{k} (n-k)! &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{n!}{k!} \\ &= n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right) \end{aligned}$$

O número de sorteios que dão certo é $n!$ menos o valor acima, isto é,

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \tag{1.2}$$

Dividindo por $|\Omega| = n!$, temos a probabilidade do sorteio dar errado:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Esta é a resposta exata do problema. Lembrando que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j j! \quad \text{(soma infinita)} \tag{1.3}$$

temos que uma resposta aproximada do problema é $e^{-1} \simeq 0.37$.

Quão boa é essa aproximação? E possível (e não é difícil) mostrar que a diferença entre a resposta exata e e^{-1} é (em módulo) menor que $\frac{1}{(n+1)!}$. Portanto se $n \geq 5$, a probabilidade com 2 algarismos corretos é 0.37. Outra consequência dessa estimativa da diferença é que o valor em (1.2) é *exatamente* igual a $n!/e$ arredondado para o inteiro mais próximo. □

2. Fórmula de Stirling e aplicações

É impossivel encontrar uma fórmula exata para o fatorial em termos apenas de funções mais simples. Mas existe uma expressão aproximada relativamente simples, conhecida como *Fórmula de Stirling*[1]

$$\boxed{n! \simeq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} \tag{2.1}$$

O que significa uma fórmula aproximada? No caso da Fórmula de Stirling, o erro *relativo* se aproxima de zero a medida que n aumenta. A tabela abaixo ilustra isso, e também mostra que a fórmula é razoalvelmente boa mesmo para valores pequenos[2] de n:

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$	erro
1	1	0.92	7.79%
2	2	1.92	4.05%
3	6	5.84	2.73%
4	24	23.5	2.06%
5	120	118	1.65%
6	720	710	1.38%
7	5040	4980	1.18%
8	4.03×10^4	3.99×10^4	1.04%
9	3.63×10^5	3.60×10^5	0.92%
10	3.63×10^6	3.60×10^6	0.83%
20	2.43×10^{18}	2.42×10^{18}	0.42%
30	2.65×10^{32}	2.65×10^{32}	0.28%
40	8.16×10^{47}	8.14×10^{47}	0.21%

Não vamos demonstrar a fórmula de Stirling, mas vamos explicar como obter uma aproximação bastante tosca mais simples: Tomamos o logaritmo

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$$

[1] A fórmula $n! \simeq cn^{n+1/2}e^{-n}$, onde c é uma contante, foi descoberta por De Moivre em 1733; depois Stirling mostrou que $c = \sqrt{2\pi}$.

[2] Mas é claro que para n pequeno ninguém em sã consciência pensaria em usar a fórmula.

Uma maneira tosca (mas não de todo ruim) de aproximar esse tipo de soma é através de uma integral. Em muitos casos, integrais são mais simples de calcular do que somas. No nosso caso:

$$\ln n! \sim \int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 \,.$$

Exponenciando temos $n! \sim e \cdot n^n e^{-n}$. Nessa aproximação descuidada, já aparecem os termos principais da fórmula de Stirling. Tendo mais cuidado é possível substituir o e acima por $\sqrt{2\pi n}$, o que respresenta uma correção relativamente pequena.

As respostas de problemas de probabilidade muitas vezes aparecem fatoriais muito grandes, e assim a fórmula de Stirling é útil para dar respostas aproximadas. Mas para quem tem uma calculadora científica ou um computador, qual o interesse disso? Quando a resposta do problema depende de uma variável livre n, podemos em alguns casos buscar uma resposta aproximada que mostre a dependência em n de maneira mais simples.

Problema 2.1. n objetos são colocadas ao acaso em n gavetas. Qual a probabilidade de cada gaveta conter um único objeto? Dê uma resposta exata, e uma resposta aproximada mais simples.

Solução. A resposta exata é $n!/n^n$. Pela Fórmula de Stirling (2.1), temos a resposta aproximada $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}$. Note que quando n é grande, este valor é muito pequeno: apesar de $\sqrt{2\pi n}$ ser garnde, e^n é muito maior, e portanto o quociente é pequeno. □

Exemplo 2.1 (Livro [F], pág. 28)**.** Digamos que em uma certa cidade temos em média 1 acidente de trânsito por dia. A partir da solução aproximada para o exemplo 2.1, *sem fazer contas*, ver que as semanas com uma distribuição uniforme de 1 acidente por dia são bastante raras (pois e^{-7} é bem pequeno). Se fizermos as contas, obteremos que essas semanas "uniformes" só aparecem em média uma vez a cada 3 anos.

Problema 2.2. Lançamos uma moeda (honesta) um número grande n de vezes. Supondo que n é par, qual a probabilidade de exatamente metade dos lances ter dado cara? Dê uma resposta exata, e uma resposta aproximada mais simples.

Solução. A resposta exata é

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{[(n/2)!]^2}.$$

Aproximando por Stirling (2.1),

$$\frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{2^n \cdot \left[\sqrt{\pi n}\, (n/2)^{(n/2)} e^{-n/2}\right]^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Sem ter que fazer contas complicadas, vemos que se n é moderadamente grande, essa probabilidade é pequena, mas não extremamente pequena. Por exemplo, usando a aproximação super-tosca $\pi \sim 4$, vemos que a probabilidade de tirar exatamente 25 caras em $n = 50$ lances é aproximadamente 10% (a resposta precisa é 7.96%), e a probabilidade de tirar exatamente 2500 caras em $n = 5000$ lances é aproximadamente 1%. □

3. Variáveis aleatórias e valor esperado

Um resultado numérico obtido a partir de um experimento aleatório é chamado de *variável aletatória.*

Exemplo 3.1. Lançamos 2 dados (de 6 faces) e consideramos a soma X dos resultados. Então X é uma variável aleatória.

O *valor esperado* (ou *esperança*) de uma variável aleatória X é o número EX definido assim: Se $v_1, \ldots, v_k$ são os possíveis valores assumidos por X, com respectivas probabilidades $p_1, \ldots, p_k$ (de modo que $p_1 + \cdots + p_k = 1$), então definimos

$$EX = p_1 v_1 + \cdots + p_k v_k.$$

Informalmente falando, o valor esparado EX indica o valor médio que será produzido pelo experimento aleatório repetido muitas vezes.

Exemplo 3.2. Vamos calcular o valor esperado da variável aleatória X do Exemplo 3.1. Os possíveis valores de X são $2, 3, \ldots, 12$. Contamos de quantas maneiras cada um desses valores pode aparecer: $2 = 1 + 1$ (1 maneira, probabilidade $1/36$), $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ (2 maneiras, probabilidade $2/36$), $\ldots$, $6 = 1 + 5 = 4 + 2 = \cdots = 5 + 1$ (5 maneiras, probabilidade $5/36$), $7 = 1 + 6 = 5 + 2 = \cdots = 6 + 1$ (6 maneiras, probabilidade $6/36$), $8 = 2 + 6 = \cdots = 6 + 2$ (5 maneiras, probabilidade $5/36$), $\ldots$, $12 = 6 + 6$ (1 maneira, probabilidade $1/36$). Portanto EX vale

$$\frac{1}{36}\cdot 2+\frac{2}{36}\cdot 3+\frac{3}{36}\cdot 4+\frac{4}{36}\cdot 5+\frac{5}{36}\cdot 6+\frac{6}{36}\cdot 7+\frac{5}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 9+\frac{3}{36}\cdot 10+\frac{2}{36}\cdot 11+\frac{1}{36}\cdot 12 = 7.$$

A conta do exemplo anterior foi trabalhosa, mas *existe uma maneira bem mais fácil de resolver.* Basta usarmos a seguinte propriedade: *O valor esperado de uma soma de variáveis aleatórias é a soma dos valores esperados.*

Vamos refazer a conta do Exemplo 3.2 O valor esperado do primeiro dado é

$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = 3.5.$$

O mesmo vale para o segundo dado. Logo $EX = 3.5 + 3.5 = 7$.

4. A distribuição binomial

Começemos com um problema bem fácil:

Problema 4.1. Uma moeda "honesta" é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de obtermos exatamente 3 caras?

Solução.

$$\frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} = \frac{15}{128} = 0.1172. \qquad \square$$

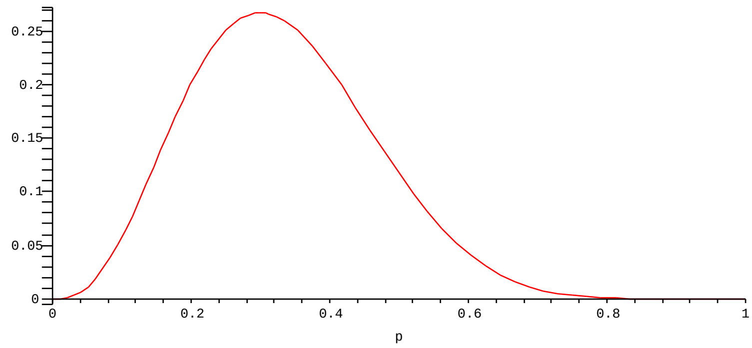
Aqui assumimos que a moeda é *honesta*, isto é, que ela não tem mais ou menos chance de dar cara do que coroa. E se ela fosse "desonesta" (ou "viciada")? Por exemplo:

Problema 4.2. Uma moeda viciada tem probabilidade p de dar cara. Lnaçamos a moeda 10 vezes. Qual a probabilidade de obtermos exatamente 3 caras, se $p = 1/5$?

Solução. A probabilidade dos 3 primeiros lances serem caras e os 7 seguintes serem coroas é $(1/5)^3(4/5)^7 = 0.001678$. O mesmo vale para qualquer distribuição fixada das 3 caras dentre os 10 lances. Existem $\binom{10}{3} = 120$ tais maneiras. Portanto a resposta é $120 \times 0.001678 = 0.2013$, ou seja, aproximadamente 20%. $\square$

Problema 4.3. Mostrar graficamente como a resposta do problema anterior depende de p.

Solução. Com o comando `plot(120*p^3*(1-p)^7,p=0..1);` no MAPLE obtemos:



Qual p corresponde ao valor máximo? Intuitivamente (ou olhando o gráfico), a resposta parece ser $p = 3/10$. Já que estamos com o MAPLE aberto, podemos confirmar isso com `solve(diff(p^3*(1-p)^7,p)=0);` $\square$

Generalizando o que foi feito acima, vemos que se uma moeda viciada tem probabilidade p de dar cara, então a probabilidade de obtermos k caras em n lançamentos é

$$\boxed{b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \tag{4.1}$$

Nesse caso (ou toda vez que aparecer a fórmula acima), dizemos que o número de caras é uma variável aleatória que tem *distribuição binomial.*

Observação. Note que a soma dessas probabilidades (com k variando de 0 a n) vale 1, como deve ser. Isso decorre da fórmula do binômio:

$$1 = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} b(k,n,p).$$

Problema 4.4. Qual o valor esperado do número de caras?

Solução. A princípio, temos que calcular $\sum_{k=0}^{n} k \times b(k,n,p)$, onde $b(k,n,p)$ é dado por (4.1), o que parece complicado. Na verdade não precisamos calcular isso diretamente. Para um lançamento, o valor esperado do número de caras é $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$. Logo, pela propriedade da soma vista antes, o valor esperado de caras em n lançamentos é $\boxed{np}$. $\square$

Note que a fórmula (4.1) fica bem mais simples se a moeda é honesta, isto é, $p = 1/2$:

$$\boxed{b(k, n, 1/2) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}} \tag{4.2}$$

No caso da moeda honesta, qualquer sequencia de n caras ou coroas é igualmente provável. Assim, a fórmula acima também pode ser obtida por um argumento de contagem.

5. A aproximação de Poisson

Problema 5.1. Um congresso de estudantes é realizado em um único dia (que não é o 29 de fevereiro), e reúne 500 pessoas. Qual a probabilidade de nenhum dos participantes estar de aniversário? De existir apenas um aniversariante? Dois aniversariantes? Três aniversariantes?

Solução. Basta aplicar a fórmula da distribuição binomial com $p = 1/365$, $n = 500$. As respostas são, respectivamente:

$$b(0, n, p) = \frac{364^{500}}{365^{500}} = 0.254\,, \qquad b(1, n, p) = \frac{500 \times 364^{499}}{365^{500}} = 0.348\,,$$
$$b(2, n, p) = \frac{124750 \times 364^{498}}{365^{500}} = 0.239\,, \qquad b(3, n, p) = \frac{20708500 \times 364^{497}}{365^{500}} = 0.109\,.$$

Talvez a sua calculadora não seja capaz de fazer essas contas. E agora? Veremos uma solução simples a seguir. □

Queremos encontrar uma aproximação para $b(k, n, p)$ da fórmula (4.1), quando n é grande e p é pequeno. Vamos supor que o valor esperado (lembre do Problema 4.4) $\lambda = np$ não seja nem extremamente grande nem extremamente pequeno. Nesse caso, temos a *aproximação de Poisson*

$$\boxed{b(k, n, p) \simeq \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} \tag{5.1}$$

Observação. Note que a soma dessas probabilidades (com k variando de 0 a ∞) vale 1, como deve ser. Isso decorre da fórmula 1.3.

Justificativa. Vamos assumir $n \gg k$ e $p \ll 1$.

$$\begin{aligned} b(k, n, p) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1) p^k (1-p)^{n-k} \\ &\simeq \frac{1}{k!} (np)^k (1-p)^n \\ &= \frac{1}{k!} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \simeq e^{-\lambda} \quad \text{se } n \text{ é grande.} \tag{5.2}$$

De fato, por Cálculo,

$$\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \simeq n\left(\ln 1 - \ln'(1)\cdot\frac{\lambda}{n}\right) = -n\cdot\frac{\lambda}{n} = -\lambda.$$

Isso mostra que (5.2) vale, e portanto (5.1) vale. □

Observação. O que foi feito acima pode ser feito preciso da seguinte maneira: Se uma sequência p_n é tal que

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0 \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} b(k,n,p_n) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \text{para cada } k = 0,1,2,\dots$$

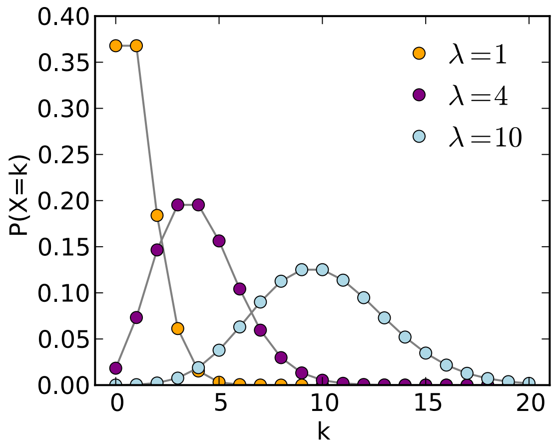
A demonstração disso está basicamente feita acima; basta ter um cuidado adicional para obter os limites.

Observação. Note que a soma do lado direito em (5.1) (com k variando de 0 a ∞) vale 1, como esperado. Isso decorre da fórmula 1.3.

Agora podemos refazer a conta do exemplo 5.1: $\lambda = 500/365 = 1.370$. As probabilidades de 0, 1, 2, 3 aniversariantes são:

$$e^{-\lambda} = 0.254, \quad \lambda e^{-\lambda} = 0.348, \quad \lambda^2 e^{-\lambda}/2 = 0.238, \quad \lambda^3 e^{-\lambda}/6 = 0.109.$$

Na Wikipedia encontramos o seguinte gráfico, que dá uma ideia de como o lado direito de (5.1) se comporta como função de k para alguns valores de λ:

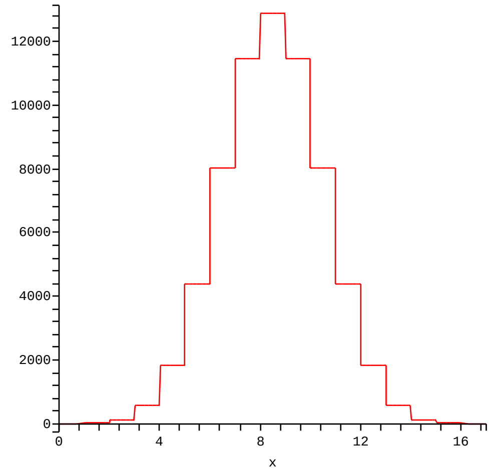


Exemplos de situações onde a aproximação de Poisson funciona muito bem:

- Digamos que entre 15:17 e 15:18 do dia de hoje o Google conte o número de acessos ao site www.google.br em cada segundo. Se λ é o número médio de acessos por segundo, então a probabilidade de termos k acessos entre 15:17:36 e 15:17:37 é aproximadamente $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$. De fato, o número n de internautas brasileiros online será muito grande, mas a probabilidade p de um internauta específico acessar o site neste segundo é pequena.
- Número de decaimentos por segundo de uma amostra de material radioativo (detectados por um contador Geiger)...

6. A aproximação normal para os números binomiais

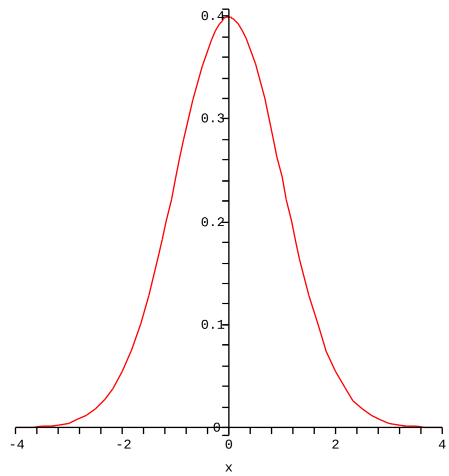
Suponha que n é mais ou menos grande. Que aparência tem o gráfico da função de variável discreta $f(k) = \binom{n}{k}$? Por exemplo, para $n = 16$, o comando `plot(binomial(16,floor(x)),x=0..17);` no MAPLE produz:



Isso se parece um pouco com a famosa *curva normal de Gauss*, que é definida como o gráfico da função

$$\boxed{\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}} \tag{6.1}$$

O comando `plot((2*Pi)^(-0.5)*exp(-x^2/2),x=-4..4);` dá



Observação. Você pode se perguntar por que não usar uma função mais simples com a mesma cara, como $e^{-x^2/2}$ ou e^{-x^2}. Uma razão é que com a definição em (6.1), a área abaixo do gráfico é 1, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1$. Outra razão é que a escolha acima torna mais simples as fórmulas a seguir.

A similaridade dos dois gráficos não é coincidência: é possivel provar que a medida que n cresce os gráficos ficam mais e mais parecidos (desde que façamos a mudança apropriada na escala e na posição dos eixos). De fato, temos a *aproximação normal para os números binomiais*

$$\boxed{\binom{n}{k} \simeq 2^n h\phi\big(h(k-n/2)\big)} \quad \text{onde} \quad \boxed{h = \frac{2}{\sqrt{n}}} \tag{6.2}$$

Lembrando de (4.2), podemos reescrever isso como:

$$\boxed{b(k,n,1/2) \simeq h\phi\big(h(k-n/2)\big)} \tag{6.3}$$

Vamos intepretar essa fórmula: O efeito do $-n/2$ é fazer uma translação no gráfico de modo a centrá-lo em $k = n/2$. O efeito do h é uma mudança de escalas: estica na vertical, contrai na horizontal.[3] Mas por que o valor de h é este $\frac{2}{\sqrt{n}}$? No Problema 2.2, vimos que $b(n/2,n,1/2) \simeq \sqrt{2}/\sqrt{\pi n}$. Por outro lado, por (6.3) devemos ter $b(n/2,n,1/2) \simeq h\phi(0)$, enquanto por (6.1), $\phi(0) = 1/\sqrt{2\pi n}$. Portanto o valor de h parece ser o correto.

Exemplo 6.1. Se $n = 30$ e $k = 10$, então o lado esquerdo em (6.2) vale 30045015, enquanto o lado direito vale 29543039; o erro é de 1.7%.

Se olharmos gráficos da distribuição binomial (4.1) com outro valor de $p \neq 1/2$ e n grande, de novo veremos algo parecido com a curva normal de Gauss. De fato, existe também uma aproximação normal para a distribuição binomial com p qualquer:

$$\boxed{b(k,n,p) \simeq h\phi\big(h(k-np)\big)} \quad \text{onde} \quad \boxed{h = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}}$$

Problema 6.1. Imitando o que foi feito antes, mostre que esta deve ser a fórmula correta.

Observação. Outra maneira de explicar o valor de h é usar o conceito de *desvio-padrão.* Porém não faremos isto aqui.

Referências

[F] W. Feller. *Introdução à Teoria das Probabilidades e Suas Aplicações. Parte 1 – Espaços amostrais discretos.* Ed. Edgard Blucher, 1976.

[3] O esticamento na vertical deve compensar com a contração na horizontal para manter a área do grafico, já que $\sum_{k=0}^{n} b(k,n,1/2) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx$. Por isso o mesmo h aparece duas vezes na fórmula.