

## Prova Final de Matemática Discreta – 01/07/2010

Nome: \_\_\_\_\_ Turma: Jairo.

Calculadora é permitida; consulta e celular, não. Justifique as questões de forma clara. As questões podem ser resolvidas a lápis, em qualquer ordem.

Tempo: 1h50.

1. [1.5 pt] Seja  $x, y$  variáveis em um domínio não-vazio  $D$ , e seja  $P(x, y)$  um predicado. Considere o grafo (não-orientado) cujos vértices são as seguintes sentenças:

$(\forall x)(\forall y)P(x, y)$

$(\forall y)(\forall x)P(x, y)$

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$

$(\exists y)(\forall x)P(x, y)$

$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$(\exists y)(\exists x)P(x, y)$

e tal que as arestas ligam sentenças *incomparáveis*. Ou seja, existe uma aresta ligando  $A$  e  $B$  se e somente se  $A \rightarrow B$  não é tautologia e  $B \rightarrow A$  não é uma tautologia. Complete o desenho do grafo acima colocando as arestas. *A questão deve ser respondida nesta folha, e não é necessário justificar.*

2. Seja  $S(n) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$ .
- (a) [0.5 pt] Calcule  $S(1), S(2), S(3), S(4)$ . Chute uma fórmula fechada para  $S(n)$ .
- (b) [1 pt] Demonstre por indução a fórmula fechada. *Escreva claramente todos os passos! Redação confusa ou preguiçosa será pontuada de acordo.*
3. Uma partícula estando no ponto  $(x, y)$  do plano cartesiano pode se movimentar para o ponto  $(x + 1, y)$  ou para o ponto  $(x, y + 1)$ .
- (a) [1 pt] Quantos são os trajetos possíveis que esta partícula pode percorrer do ponto  $(0, 0)$  até o ponto  $(10, 3)$ ?
- (b) [1 pt] Escolhendo-se ao acaso um dos trajetos definidos no item (a), qual a probabilidade de que ele passe pelo ponto  $(2, 2)$ ?
4. [1.5 pt] A mando da professora de caligrafia, Joãozinho escreveu os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 (nessa ordem) cinquenta vezes. Chamemos de  $x$  o número obtido, isto é,  $x = 1234512345\dots12345$ . Qual o resto da divisão de  $x$  por 9?
5. Verdadeiro ou falso? *Justifique (com demonstração ou contra-exemplo).*
- (a) [1.5 pt] Lançamos 4 dados comuns (não-viciados, com faces de 1 a 6). O evento “pelo menos um dos números é 6” é mais provável do que “a soma dos números é par”.
- (b) [1 pt] Se  $a, b$  e  $m$  são inteiros com  $m \geq 2$  então  $(a + b)^m \equiv a^m + b^m \pmod{m}$ .
- (c) [1 pt] Se um grafo tem 10 vértices e 50 arestas então ele não é simples (isto é, contém algum laço ou alguma aresta múltipla).