

Prova Final de Matemática Discreta – 01/07/2010

Nome: _____ Turma: Christine.

Calculadora é permitida; consulta e celular, não. Justifique as questões de forma clara.

1. [1.5 pt] Seja x, y variáveis em um domínio não-vazio D , e seja $P(x, y)$ um predicado. Considere o grafo (não-orientado) cujos vértices são as seguintes sentenças:

$(\forall x)(\forall y)P(x, y)$

$(\forall y)(\forall x)P(x, y)$

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$

$(\exists y)(\forall x)P(x, y)$

$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$(\exists y)(\exists x)P(x, y)$

e tal que as arestas ligam sentenças *incomparáveis*. Ou seja, existe uma aresta ligando A e B se e somente se $A \rightarrow B$ não é tautologia e $B \rightarrow A$ não é uma tautologia. Complete o desenho do grafo acima colocando as arestas. *A questão deve ser respondida nesta folha, e não é necessário justificar.*

2. Seja

$$S(n) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

- (a) [0.5 pt] Calcule $S(1), S(2), S(3), S(4)$. Chute uma fórmula fechada para $S(n)$.
- (b) [1.5 pt] Demonstre por indução a fórmula fechada. *Escreva claramente todos os passos! Redação confusa ou preguiçosa será pontuada de acordo.*
3. Uma partícula estando no ponto (x, y) do plano cartesiano pode se movimentar para o ponto $(x + 1, y)$ ou para o ponto $(x, y + 1)$.
- (a) [1 pt] Quantos são os trajetos possíveis que esta partícula pode percorrer do ponto $(0, 0)$ até o ponto $(10, 3)$?
- (b) [1.5 pt] Escolhendo-se ao acaso um dos trajetos definidos no item (a), qual a probabilidade de que ele passe pelo ponto $(2, 2)$?
4. [2 pt] Expresse de *todas* as formas possíveis o número 602 como a soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja múltiplo de 30 e o segundo seja múltiplo de 14.
5. Verdadeiro ou falso? Prove se for verdadeiro, ou dê um contra-exemplo se for falso.
- (a) [1 pt] Se a, b e m são inteiros com $m \geq 2$ então $(a + b)^m \equiv a^m + b^m \pmod{m}$.
- (b) [1 pt] Se um grafo tem 10 vértices e 50 arestas então ele contém algum laço ou aresta múltipla.