

Lista de Matemática Discreta 2010/1 (última lista para P2)

Princípio da Inclusão/Exclusão

1. Quantos números inteiros entre 1 e 2000 são potências de inteiros?¹
2. Cada pacote de Sucrilhos contém uma miniatura de um dos super-heróis: Super Homem, Batman, Homem Aranha, Wolverine, Homem de Ferro. Joãozinho não gosta dos personagens da DC Comics (os 2 primeiros); só gosta dos personagens da Marvel (os outros 3). O pai de Joãozinho comprou de uma vez 6 pacotes de Sucrilhos para o consumo do mês. Qual a probabilidade de Joãozinho já ter encontrado todos os super-heróis que ele gosta?²
3. Prove o seguinte princípio da inclusão/exclusão *invertido*:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

Valor esperado

4. Lançamos dois dados (cujas faces são numeradas de 1 a 6) e anotamos o maior resultado. Qual o valor esperado desse experimento?³
5. Refaça o exercício anterior para dados (imaginários) de n faces.⁴

Distribuição binomial

6. Se a probabilidade de acertar um tiro é $1/5$ e são disparados 10 tiros, qual é a probabilidade de que o alvo seja atingido pelo menos 2 vezes?⁵

Aproximação de Poisson

7. No final da Segunda Guerra Mundial, 537 bombas V2 atingiram a região central de Londres. Essa região foi dividida em 576 áreas, cada uma com $1/4$ de km^2 . Estime o número de áreas que tiveram a sorte de não serem atingidas por nenhuma bomba, e o número de áreas azaradas que foram atingidas por pelo menos 3 bombas.⁶

8. Estime o número médio de passas por biscoito, se desejarmos que apenas 1% dos biscoitos apareça sem passas.⁷

9. Prove que o maior valor que aparece na sequência de probabilidades de Poisson ocorre quando k é o maior inteiro menor ou igual a λ .

Aproximação Normal

10. Seja n um número par bem grande. Para que valores de k o número binomial $\binom{n}{k}$ é aproximadamente 100 vezes menor que $\binom{n}{n/2}$?⁸

¹Resp: 56.

²Resp: 34.9%.

³Resp: 4.47.

⁴Resp: $\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

⁵Resp: 62%.

⁶Resp: 227 áreas sortudas e 39 áreas azaradas. (Os números verdadeiros são 229 e 43. Fonte: Feller.)

⁷Resp: 4.6 passas.

⁸Resp: $k \simeq 0.5n \pm 1.52\sqrt{n}$.