Matemática Discreta – 2010/1

Lista de Grafos

Os símbolos $\star$ indicam os exercícios mais difíceis.

1. Desenhe um grafo com seis vértices, cada um com grau 3.
2. Desenhe cinco grafos diferentes que possuam quatro vértices e sejam conexos e simples.
3. Desenhe todas as árvores com 6 vértices ou menos. Quantas árvores diferentes existem (supondo que não rotulamos os vértices)?
4. Prove que se um grafo tem 100 vértices e mais de 4950 arestas então ele não é simples.
5. Prove que se um grafo tem 100 vértices e menos de 99 arestas então ele não pode ser conexo.
6. ($\star$) Prove que se um grafo simples tem 100 vértices e mais de 4851 arestas então ele é conexo.
7. Considere o grafo simples com 10 vértices no qual existe uma aresta conectando cada par de vértices (geralmente denotado K_{10}).
   (a) Existem quantos caminhos de comprimento 5 que não repetem vértices?
   ($\star$) (b) Existem quantos caminhos de comprimento 5 que não repetem arestas?
8. Determine se existe ou não um grafo com 7 vértices, cujos graus são:
   (a) 0, 2, 2, 2, 4, 4, 6.
   (b) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5.
9. Seja G um grafo orientado, e seja A a sua matriz de adjacência orientada.
   (a) O que podemos afirmar sobre G se A tem uma linha formada apenas por zeros?
   (b) O que podemos afirmar sobre G se A tem uma coluna formada apenas por zeros?
10. Suponha que A é a matriz de adjacência de um certo grafo. Sabendo que
$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$
    determine:
    (a) a quantidade de caminhos de comprimento 3 saindo do vértice 1;
    (b) a quantidade de caminhos de comprimento 6 saindo do vértice 2 e terminado no vértice 3.
11. Sejam a, v inteiros positivos. Considere o grafo simples com $a + v$ vértices, sendo a deles azuis e v vermelhos, tal que que existe uma aresta ligando dois vértices se e somente se eles são de cores diferentes. Para quais valores de a e v existe *caminho Euleriano* (fechado ou não) neste grafo?

12. Seja o grafo simples com 6 vértices A, B, C, D, E, F, e arestas com os seguintes comprimentos:

$$\begin{array}{ccccc} AB = 3, & AC = 1, & AD = 4, & AE = 1, & AF = 5. \\ BC = 9, & BD = 2, & BE = 6, & BF = 5, & CD = 3. \\ CE = 5, & CF = 8, & DE = 9, & DF = 7, & EF = 9. \end{array}$$

Aplique o algoritmo de Dijkstra e encontre uma árvore mínima em relação ao vértice A. Dê também a distância de cada vértice a A.