GABARITO da 1ª prova de Mat. Discreta – 2010.1 – Turma: Jairo

As respostas na prova devem ser justificadas de maneira clara e completa. Este gabarito deve servir de modelo de como escrever tais justificativas.

A REDAÇÃO é importante, e não apenas as contas! Explique em palavras o que você está fazendo! Por exemplo, nas questões de indução, é fundamental que você escreva coisas como "Estou assumindo ... Quero provar que ..."

1. [2 pt] Construa uma tabela verdade para a sentença abaixo

$$\big(q \to (p \wedge r)\big) \leftrightarrow \big(\sim q\big)$$

Solução:

p	q	r	$p \wedge r$	$q \to (p \wedge r)$	$\sim q$	$\cdots \leftrightarrow \ldots$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

2. [2 pt] Encontre uma proposição equivalente à proposição

$$(q \vee p) \wedge (p \to (\sim r))$$

que use somente os conectivos $\wedge$ e $\sim$ (e parênteses).

Solução: Na primeira parte, usamos dupla negação e De Morgan:

$$q \vee p \Leftrightarrow \sim\sim(q \vee p) \Leftrightarrow \sim((\sim q) \wedge (\sim p))$$

Na segunda parte, usamos a "regra da implicação" e De Morgan:

$$p \to (\sim r) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim r) \Leftrightarrow \sim(p \wedge r)$$

Juntando (com $\wedge$) os dois, temos a resposta:

$$\big[\sim((\sim q) \wedge (\sim p))\big] \wedge [\sim(p \wedge r)]$$

3. Sendo x e b, variáveis no domínio dos números reais, determine o valor lógico das seguintes proposições. [1 pt cada]

a) $(\forall b)(\exists x)(x^2 + bx - 1 = 0)$.

b) $(\forall b)(\exists x)(x^2 + bx - 1 \neq 0)$.

(Evidentemente, você deve justificar suas respostas.)

Soluções:

a) VERDADEIRO. O "discriminante" da equação de 2º grau $x^2+bx-1=0$ é $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4$. Para todo b temos $\Delta > 0$. Portanto existe solução x da equação.

b) VERDADEIRO. Qualquer que seja o valor de b, a equação é de 2º grau e portanto tem no máximo duas soluções. Assim, para todo b podemos escolher x como um número real diferente dessas soluções, e então teremos $x^2 + bx - 1 \neq 0$.

   Outra solução, ainda mais simples: Dado qualquer b, escolha $x = 0$.

4. [2 pt] Prove, por indução, que $2^n > 100n$ para todo inteiro $n \geq 10$.

Solução: Seja $P(n)$ o predicado $2^n > 100n$. O caso-base é $n = 10$, e a afirmação $P(10)$ é $1024 > 1000$, que é verdadeira.

Passo indutivo: Suponha que $n \geq 10$ é tal que vale $P(n)$, isto é, $2^n > 100n$. Então

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times 100n = 100n + 100n > 100n + 100 = 100(n+1).$$

Portanto $P(n+1)$ é verdadeira.

Por indução, mostramos que a afirmação "$(\forall n \geq 10)\, P(n)$" é verdadeira.

5. [2 pt] A sequência dos números de Fibonacci F_1, F_2, $\ldots$ é definida recursivamente assim:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ (se } n \geq 3).$$

Seja S_n a soma dos n primeiros números de Fibonacci. Prove, por indução, que $S_n = F_{n+2} - 1$.

Solução: Seja $P(n)$ o predicado $S_n = F_{n+2} - 1$. O caso-base é $n = 1$, e a afirmação $P(1)$ é $S_1 = F_3 - 1$. Como $S_1 = F_1 = 1$ e $F_3 = F_2 + F_1 = 2$, vemos que $P(1)$ é verdadeira.

Passo indutivo: Suponha que n é tal que vale $P(n)$, isto é, $S_n = F_{n+2} - 1$. Por definição, a sequência S_n obedece à relação de recorrência $S_{n+1} = S_n + F_{n+1}$. Logo

$$S_{n+1} = S_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1,$$

onde no final usamos a relação de recorrência dos números de Fibonacci. Portanto $P(n+1)$ é verdadeira.

Por indução, mostramos que a afirmação "$(\forall n \geq 10)\, P(n)$" é verdadeira.