Prova Final de Matemática Discreta – 01/07/2010

Nome: ____ Turma: Jairo.

Calculadora é permitida; consulta e celular, não. Justifique as questões de forma clara. As questões podem ser resolvidas a lápis, em qualquer ordem. Tempo: 1h50.

1. [1.5 pt] Seja x, y variáveis em um domínio não-vazio D, e seja $P(x, y)$ um predicado. Considere o grafo (não-orientado) cujos vértices são as seguintes sentenças:

$$\boxed{(\forall x)(\forall y)P(x, y)} \qquad \boxed{(\forall y)(\forall x)P(x, y)}$$

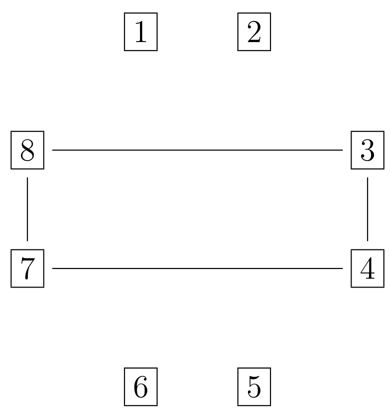
$$\boxed{(\forall x)(\exists y)P(x, y)} \qquad\qquad \boxed{(\forall y)(\exists x)P(x, y)}$$

$$\boxed{(\exists x)(\forall y)P(x, y)} \qquad\qquad \boxed{(\exists y)(\forall x)P(x, y)}$$

$$\boxed{(\exists x)(\exists y)P(x, y)} \qquad \boxed{(\exists y)(\exists x)P(x, y)}$$

e tal que as arestas ligam sentenças *incomparáveis*. Ou seja, existe uma aresta ligando A e B se e somente se $A \to B$ não é tautologia e $B \to A$ não é uma tautologia. Complete o desenho do grafo acima colocando as arestas. *A questão deve ser respondida nesta folha, e não é necessário justificar.*

Solução:



Explicação: $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ são equivalentes entre si, e implicam todas as outras sentenças (lembre que o domínio é não-vazio). Já $\boxed{5}$ e $\boxed{6}$ são equivalentes entre si, e são implicadas por qualquer das outras sentenças. Logo não há arestas contendo esses quatro vértices. Em relação aos outros vértices, temos as implicações $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{8}$ e $\boxed{7} \Rightarrow \boxed{3}$. Além destas, nenhuma outra implicação é uma tautologia. Portanto, o grafo fica como desenhado acima.

2. Seja $S(n) = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!}$.

   (a) [0.5 pt] Calcule $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$. Chute uma fórmula fechada para $S(n)$.

   > **Solução:**
   > $$S(1) = \frac{1}{2} \quad S(2) = \frac{5}{6} \quad S(3) = \frac{23}{24} \quad S(4) = \frac{119}{120}$$
   > O chute é
   > $$S(n) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

   (b) [1 pt] Demonstre por indução a fórmula fechada. *Escreva claramente todos os passos! Redação confusa ou preguiçosa será pontuada de acordo.*

   > **Solução:** *Caso-base* $n = 1$: a fórmula funciona pois $S(1) = \frac{1}{2}$.
   > *Passo indutivo:* Vamos provar que se a fórmula funciona para $S(n-1)$, para algum $n \geq 2$, então ela funciona para $S(n)$. Pela definição da sequência, vale a seguinte relação de recorrência:
   > $$S(n) = S(n-1) + \frac{n}{(n+1)!}$$
   > Supondo que a fórmula funciona para $S(n-1)$, isto é, $S(n-1) = \frac{n!-1}{n!}$, temos
   > $$\begin{aligned} S(n) = \frac{n! - 1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{(n+1)\cdot(n!-1) + n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)! - (n+1) + n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} \end{aligned}$$
   > Portanto a fórmula para $S(n)$ funciona.

3. Uma partícula estando no ponto (x, y) do plano cartesiano pode se movimentar para o ponto $(x+1, y)$ ou para o ponto $(x, y+1)$.

   (a) [1 pt] Quantos são os trajetos possíveis que esta partícula pode percorrer do ponto $(0, 0)$ até o ponto $(10, 3)$?

   > **Solução:** Temos que dar 13 passos, sendo 10 passos para a direita e 3 para cima, em qualquer ordem. Portanto temos $\binom{13}{3} = 286$ possibilidades.

   (b) [1 pt] Escolhendo-se ao acaso um dos trajetos definidos no item (a), qual a probabilidade de que ele passe pelo ponto $(2, 2)$?

   > **Solução:** Para ir de $(0, 0)$ a $(2, 2)$ são necessários 4 passos, sendo 2 para cima; portanto há $\binom{4}{2} = 6$ possibilidades. Para ir de $(2, 2)$ a $(10, 3)$ são

necessários 9 passos, sendo 1 para cima; portanto há $\binom{9}{1} = 9$ possibilidades. Assim, há $6 \times 9 = 54$ caminhos de $(0, 0)$ a $(10, 3)$ passando por $(2, 2)$. Logo a probabilidade em questão é $\frac{54}{286} = \frac{27}{143} \simeq 0.1888$.

4. [1.5 pt] A mando da professora de caligrafia, Joãozinho escreveu os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 (nessa ordem) cinquenta vezes. Chamemos de x o número obtido, isto é, $x = 1234512345\ldots12345$. Qual o resto da divisão de x por 9?

Solução: Como $10 \equiv 1 \bmod 9$, todas as potências de 10 são congruentes a 1 módulo 9. Portanto *qualquer inteiro positivo é congruente módulo 9 à soma dos seus dígitos (em decimal).* Por exemplo,

$$2010 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \equiv 2 + 0 + 1 + 0 \equiv 3 \bmod 9.$$

No caso em questão, $x \equiv 50(1+2+3+4+5) \bmod 9$. Simplificando, $x \equiv 5 \cdot 6 \equiv 3$. O resto da divisão de x por 9 é 3.

5. Verdadeiro ou falso? *Justifique (com demonstração ou contra-exemplo).*

(a) [1.5 pt] Lançamos 4 dados comuns (não-viciados, com faces de 1 a 6). O evento "pelo menos um dos números é 6" é mais provável do que "a soma dos números é par".

Solução: A probabilidade de nenhum dos 4 dados dar 6 é $(5/6)^4 \simeq 0.482$, logo a probabilidade de ter pelo menos um 6 é 0.518. A probabilidade da soma ser par é 0.5, pois há tantas possibilidades de soma par quanto de soma ímpar. [Uma maneira de ver isso é notar que $(d_1, d_2, d_3, d_4) \mapsto (d_1, d_2, d_3, 7 - d_4)$ é uma bijeção do conjunto de possibilidades que leva somas pares em somas ímpares.] Logo a resposta é VERDADEIRO.

(b) [1 pt] Se a, b e m são inteiros com $m \geq 2$ então $(a + b)^m \equiv a^m + b^m \bmod m$.

Solução: FALSO. Contra-exemplo: $a = b = 1$, $m = 4$. Aí $(a + b)^m \equiv 0 \not\equiv 2 \equiv a^m + b^m \bmod m$.

Obs: Vimos em aula que esta fórmula vale se m é primo. Isso sugere procurar um contra-exemplo com $m = 4$.

(c) [1 pt] Se um grafo tem 10 vértices e 50 arestas então ele não é simples (isto é, contém algum laço ou alguma aresta múltipla).

Solução: Se um grafo com 10 vértices é simples, então ele pode ter no máximo $\binom{10}{2} = 45$ arestas. Mas o grafo em questão tem 50 arestas, logo não pode ser simples. VERDADEIRO.