3ª prova de Matemática Discreta – 22/06/2010

Nome: ______________________________ Turma: Jairo.

Calculadora é permitida; consulta e celular, não. Todas as questões devem ser justificadas de forma clara. As questões podem ser resolvidas a lápis, em qualquer ordem. Tempo: 1h50.

1. [1.5 pt] Determine o algarismo das unidades de 2^x, onde $x = 3^{2010}$.

Solução: Temos que encontrar 2^x mod 10. As potências de 2 módulo 10 são $2^1 \equiv 2$, $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 8$, $2^4 \equiv 6$, $2^5 \equiv 2$, 4, 8, 6, ..., repetindo com período 4. Portanto temos que simplificar 3^{2010} mod 4. As potências de 3 módulo 4 são $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 1$, $3^3 \equiv 3$, ..., repetindo com período 2. Como 2010 é par, temos $x = 3^{2010} \equiv 1$ mod 4. Portanto $2^x \equiv 2^1 \equiv 2$ mod 10. A resposta é 2.

2. (a) [1 pt] Faça uma tabela de inversos multiplicativos módulo 11, usando apenas os números de 0 a 10.

Solução: Três são imediatos: 0 não tem inverso e os inversos de 1 e $10 \equiv -1$ são eles próprios. Para os outros, fatoramos números que são $\equiv 1$. Temos $1 \equiv 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ (logo $2^{-1} \equiv 6$ etc), $1 \equiv 23$ (primo), $1 \equiv 34 = 2 \times 17$ (não adianta), $1 \equiv 45 = 5 \times 9$, $1 \equiv 56 = 7 \times 8$. Resposta:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^{-1}	$\nexists$	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10

(b) [1 pt] Encontre todas as soluções do sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &\equiv 1 \text{ mod } 11 \\ x + 4y &\equiv 4 \text{ mod } 11 \end{aligned}$$

Solução: A tabela do item anterior é útil aqui. Multiplicando a primeira equação por $2^{-1} \equiv 6$, temos $x+7y \equiv 6$. Subtraindo esta equação da segunda, temos $3y \equiv 2$. Multiplicando por $3^{-1} \equiv 4$, temos $y \equiv 8$. Da segunda equação, $x \equiv 4 - 4y \equiv 5$.

3. [2 pt] Deseja-se comprar exatamente 1000 gramas de um produto que só é vendido em embalagens de 19 e 33 gramas. Apresente todas as possibilidades de compra deste produto (se existirem).

Solução: Temos que encontrar as soluções da equação $19x + 33y = 1000$ com x, y inteiros não-negativos. Primeiro encontramos uma solução particular. Começamos calculando $\text{mdc}(33, 19)$ pelo algoritmo de Euclides:

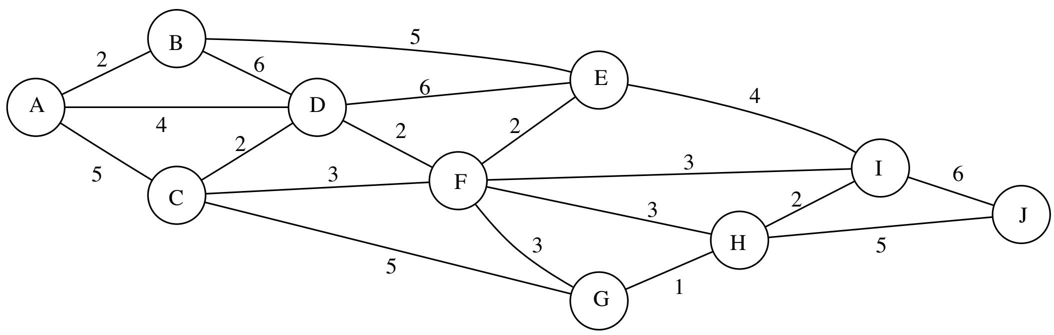
	1	1	2	1	
33	19	14	5	4	1

Usando isso, temos

$$\boxed{1} = \boxed{5} - \boxed{4} = \boxed{5} - \left(\boxed{14} - 2 \times \boxed{5}\right) = 3 \times \boxed{5} - \boxed{14}$$
$$= 3 \times \left(\boxed{19} - \boxed{14}\right) - \boxed{14} = 3 \times \boxed{19} - 4 \times \boxed{14}$$
$$= 3 \times \boxed{19} - 4 \times \left(\boxed{33} - \boxed{19}\right) = 7 \times \boxed{19} - 4 \times \boxed{33}$$

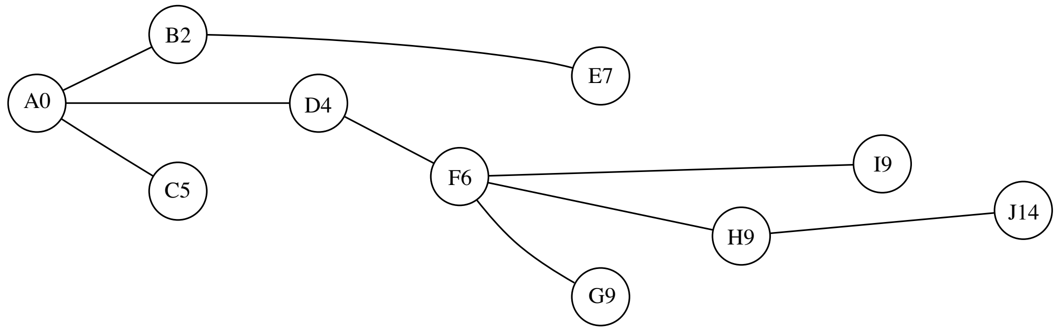
Multiplicando por 1000, achamos uma solução particular da equação $19x+33y = 1000$, a saber, $x_0 = 7000$, $y_0 = -4000$. Como $\text{mdc}(19, 33) = 1$, a solução geral é $x = 7000 - 33t$, $y = -4000 + 19t$, onde t é um inteiro qualquer. Temos $x \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 7000/33 \simeq 212.1$ e $y \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 4000/19 \simeq 210.5$. Logo as únicas possibilidades são $t = 211$ e $t = 212$, o que dá $(x, y) = (37, 9)$ e $(x, y) = (4, 28)$, respectivamente. Portanto as possibilidades de compra são 37 embalagens de 19g e 9 embalagens de 33g, ou 4 embalagens de 19g e 28 embalagens de 33g.

4. No grafo abaixo, os vértices representam cidades, as arestas representam estradas, e os números indicam os valores de pedágio:



(a) [1 pt] Encontre uma árvore que contenha os caminhos mais econômicos da cidade A às demais cidades. Indique também quanto custa chegar em cada cidade partindo de A.

Solução: Aplicando o algoritmo de Dijkstra, tomamos arestas na seguinte ordem: AB, AD, AC, DF, BE, $FG \leftrightarrow FH \leftrightarrow FI$, HJ, Obtemos a árvore mínima em relação ao vértice A (os números indicam distâncias=custos):



Obs: Aqui a solução é única.

(b) [0.5 pt] A árvore obtida no item anterior serve como guia de trajetos mais econômicos partindo de alguma outra cidade? Qual/quais?

Solução: Não. Para provar isso, temos que verificar que para toda cidade $x \neq A$ existe pelo menos alguma cidade y tal que a custo de ir de x a y permanecendo na árvore é maior que o custo mínimo. Uma possível escolha desses y's é

x	B	C	D	E	F	G	H	I	J
y	F	D	C	F	E	H	G	H	I

Exemplo: se $x = B$ então para $y = F$ o custo pela árvore é 8 enquanto o custo mínimo é 7 (caminho $B \to E \to F$).

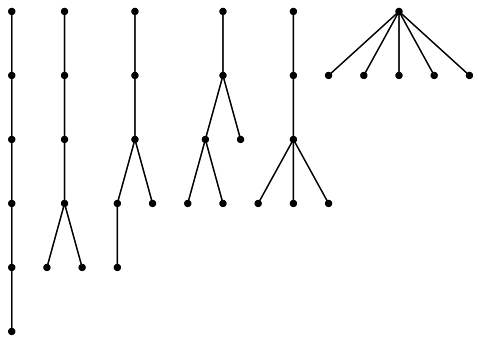
5. Verdadeiro ou falso? Justifique sua resposta!

(a) [1 pt] Sejam a, b e m inteiros com $m \geq 2$. Vale $ab \equiv 0 \bmod m$ se e somente se $a \equiv 0 \bmod m$ ou $b \equiv 0 \bmod m$.

Solução: Falso. Contra-exemplo: $m = 4$, $a = b = 2$.

(b) [1 pt] É possível desenhar 4 árvores diferentes (não-equivalentes como grafos) sendo cada uma com 6 vértices.

Solução: Verdadeiro. É possível mostrar que existem exatamente 6 árvores diferentes com 6 vértices, que são as da figura abaixo. Obviamente, não era necessário provar isso para justificar a resposta; bastava desenhar 4 dessas árvores.



(c) [1 pt] Seja G um grafo com pelo menos 2 vértices, e seja A a sua matriz de adjacência. Então G é conexo se e somente se existe um inteiro $n \geq 1$ tal que todas as entradas da matriz A^n são números diferentes de 0.

Solução: Falso. A condição "existe n tal que todas as entradas da matriz A^n são diferentes de 0" é equivalente a "podemos ligar quaisquer dois vértices (possivelmente iguais) por um caminho de comprimento fixo n". Existem grafos conexos que não têm essa propriedade. Por exemplo, se G é o grafo com dois vértices ligados por uma aresta então $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Aí $A^n = A$ se n é ímpar e $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se n é par.