3. [2 pt] Numa cidade há cinco clubes, cada um com 10.000 sócios. Há uma única pessoa na cidade que é sócia dos cinco clubes. Mas, escolhendo-se quaisquer quatro desses clubes tem-se sempre 10 sócios em comum; escolhendo-se quaisquer três desses clubes tem-se sempre 100 sócios em comum; e, finalmente, escolhendo-se quaisquer dois desses clubes tem-se sempre 1000 sócios em comum. Qual o número total de pessoas desta cidade que são sócias de pelo menos um desses clubes? (Dê uma resposta numérica explícita.)

Solução: Notamos que existem $\binom{5}{2} = 10$ pares de times, $\binom{5}{3} = 10$ trios de times e $\binom{5}{4} = 5$ “quadras” de times. O Princípio da Inclusão/Exclusão dá diretamente a resposta:

$$5 \times 10000 - 10 \times 1000 + 10 \times 100 - 5 \times 10 + 1 = \boxed{40951}$$

4. [2 pt] Uma moeda viciada tem probabilidade p de cair cara e $q = 1 - p$ de cair coroa. Essa moeda é lançada um número grande n de vezes. Suponha que np é um inteiro.

- (a) [0,5 pt] Qual a probabilidade de que caíam exatamente np caras?

Solução: Basta aplicar a fórmula da distribuição binomial com $k = np$:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \boxed{\binom{n}{np} p^{np} q^{nq}}$$

- (b) [1,5 pt] Encontre um valor aproximado (com a expressão mais simples possível) para a probabilidade do item anterior, usando a fórmula de Stirling:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \binom{n}{np} p^{np} q^{nq} &= \frac{n!}{(np)!(nq)!} \cdot p^{np} q^{nq} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi np} n^{np} p^{np} e^{-np} \sqrt{2\pi nq} n^{nq} q^{nq} e^{-nq}} \cdot p^{np} q^{nq} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}} \end{aligned}$$

5. [2 pt] Uma certa cidade tem mais de um milhão de habitantes, 1% dos quais são canhotos. Um grupo de 200 habitantes é escolhido ao acaso. Estime a probabilidade de haver 3 ou mais canhotos nesse grupo.

Solução: Como 1% dos habitantes da cidade são canhotos, o valor esperado do número de canhotos no grupo de 200 é $\lambda \simeq 2$. (O valor exato depende do número de habitantes na cidade, mas esta aproximação é extremamente boa.)

Por Poisson, a probabilidade do número de canhotos ser k vale aproximadamente $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. A probabilidade de termos 0, 1 ou 2 canhotos é

$$e^{-\lambda}\lambda^0/0! + e^{-\lambda}\lambda^1/1! + e^{-\lambda}\lambda^2/2! = e^{-2}(1 + 2 + 2) = 5e^{-2}.$$

Logo a probabilidade de termos 3 ou mais canhotos é aproximadamente $1 - 5e^{-2} =$
0.3233. (De novo, o valor exato depende do número de habitantes na cidade, mas esta aproximação é extremamente boa.)