2ª prova de Matemática Discreta – 25/05/2010

Nome: ______________________________ Turma: Christine.

Calculadora é permitida; consulta e celular, não. Todas as questões devem ser justificadas de forma clara. Tempo: 1h50.

1. [2 pt] Determine o valor de

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 98 \times 99 \times 100.$$

Solução: A soma é igual a

$$\frac{3!}{0!} + \frac{4!}{1!} + \cdots + \frac{100!}{97!} = 3! \times \left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \ldots \binom{100}{3}\right]$$
$$= 3!\binom{101}{4} = \frac{3 \times 2 \times 101 \times 100 \times 99 \times 98}{4 \times 3 \times 2} = \boxed{24\,497\,550}$$

Usamos a propriedade da soma das colunas do triângulo de Pascal.

2. [2 pt] Quantas soluções possui a equação

$$x + y + z = 21,$$

sendo x, y, z números *ímpares* positivos? (Dê uma resposta numérica explícita.)

Solução: Como x, y, z são ímpares e positivos, temos $x = 2x' - 1$, $y = 2y' - 1$, $z = 2z' - 1$ com x', y', z' inteiros positivos. A equação se torna $2x' + 2y' + 2z' - 3 = 21$, isto é, $x' + y' + z' = 12$.

Contar o número de soluções inteiras positivas desta equação é equivalente a contar o número de maneiras de dispor 2 "barrinhas" nas lacunas abaixo

$$\bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet\ \_\ \bullet \qquad \text{(12 bolas)}$$

de modo que as duas barrinhas não estejam na mesma lacuna. (Aí x' será o número de bolas até a 1ª barrinha, y' será o número de bolas entre a 1ª e a 2ª barrinhas, e z' o número de bolas da 2ª barrinha até o final.) Como há 11 lacunas, o número de soluções é

$$\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = \boxed{55}$$

3. [2 pt] Determine o menor valor de n com a propriedade que para qualquer conjunto de n inteiros não-negativos distintos, se pode garantir que existe um par de inteiros (distintos) cuja soma ou cuja diferença é múltiplo de 10.

Solução: Dado um par de números inteiros x e y, para saber se $x+y$ ou $x-y$ é múltiplo de 10, basta conhecer o último dígito de x e o último dígito de y.

Suponha que $x_1, \ldots, x_n$ são inteiros positivos tais que *nenhuma* soma ou diferença seja múltiplo de 10. Sejam $d_1, \ldots, d_n$ os últimos dígitos de $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente. Esses dígitos são todos distintos, pois senão haveria uma diferença $x_i - x_j$ múltipla de 10. O fato de nenhuma soma $x_i + x_j$ ser múltiplo de 10 faz com que os dígitos 1 e 9 não podem *ambos* aparecer na lista $d_1, \ldots, d_n$. Analogamente para 2 e 8, para 3 e 7, para 4 e 6. Assim, os n "pombos" $d_1, \ldots, d_n$ tem que entrar nas 6 "casas" $\{0\}$, $\{1,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$, $\{5\}$, com no máximo um pombo por casa. Isso é impossível se $n \geq 7$.

Por outro lado, existe uma lista de 6 números tal que nenhuma soma ou diferença seja múltiplo de 10, por exemplo: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Concluímos que a resposta é $\boxed{n = 7}$.

4. [2 pt] Motores de avião funcionam independentemente e cada motor tem a mesma probabilidade $p > 0$ de falhar durante um voo. Um avião voa com segurança se pelo menos a metade de seus motores funciona. Para quais valores de p é mais seguro viajar em um avião com 2 motores do que em um avião com 4 motores?

Solução: O avião de 2 motores cairá apenas se os 2 motores falharem, o que tem probabilidade p^2. O avião de 4 motores cairá apenas se 3 ou 4 motores falharem, o que tem probabilidade $4p^3(1-p)+p^4$ (pela distribuição binomial). Será mais seguro viajar no avião de 2 motores quando

$$p^2 < 4p^3(1-p) + p^4.$$

Ou seja, $p^2 < 4p^3(1-p)+p^4$, isto é $1 < 4p(1-p)+p^2$, ou ainda $3p^2 - 4p + 1 < 0$. A equação $3p^2 - 4p + 1 = 0$ tem soluções

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ ou } 1.$$

Portanto $3p^2 - 4p + 1$ será negativo apenas quando $\boxed{\frac{1}{3} < p < 1}$. Esta é a resposta.

5. [2 pt] 5 bolas diferentes são colocadas em 3 urnas diferentes. Qual a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas?

Solução: Numeramos as urnas como 1, 2, 3. Temos 3^5 maneiras de distribuir as bolas, logo o espaço amostral tem tamanho $|\Omega| = 3^5$ Seja A_i o evento "a urna i ficou vazia". Pelo Princípio da Inclusão/Exclusão,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Temos

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 \qquad \text{(5 bolas em 2 urnas)}$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1 \qquad \text{(5 bolas em 1 urna)}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \qquad \text{(5 bolas em 0 urnas)}$$

Portanto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ tem $3 \times 2^5 - 3 \times 1 = 93$ elementos e probabilidade $93/3^5 = 0.3827$. Este é o evento "alguma urna ficou vazia". O evento desejado "nenhuma urna ficou vazia" tem probabilidade $1 - 0.3827 = \boxed{0.6173}$.