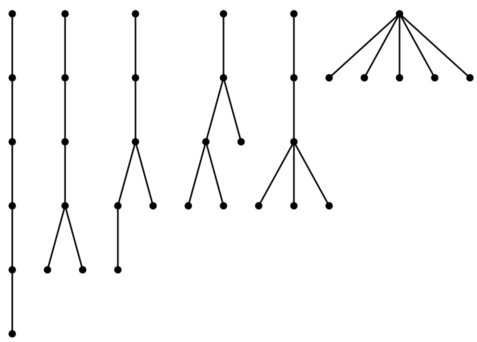
Matemática Discreta – 2010/1

Lista de Grafos

Os símbolos $\star$ indicam os exercícios mais difíceis.

1. Desenhe um grafo com seis vértices, cada um com grau 3.
2. Desenhe cinco grafos diferentes que possuam quatro vértices e sejam conexos e simples.
3. Desenhe todas as árvores com 6 vértices ou menos. Quantas árvores diferentes existem (supondo que não rotulamos os vértices)?

Resposta: Fazendo os desenhos, vemos que existem 14 árvores: 1 com 1 vértice, 1 com 2 vértices, 1 com 3 vértices, 2 com 4 vértices, 3 com 5 vértices, e 6 com 6 vértices. Por exemplo, as de 6 vértices são as seguintes:



(O seguinte fato pode ser útil: toda árvore com $n + 1$ vértices pode ser obtida acrescentando uma aresta a uma árvore com n vértices.)

4. Prove que se um grafo tem 100 vértices e mais de 4950 arestas então ele não é simples.

Resposta: Se um grafo é simples, então há no máximo 1 aresta para cada par de vértices. Portanto um grafo simples com 100 vértices tem no máximo $\binom{100}{2} = 4950$ arestas. Se tiver mais arestas do que isso, não pode ser simples.

5. Prove que se um grafo tem 100 vértices e menos de 99 arestas então ele não pode ser conexo.

Resposta: Considere um grafo conexo com 100 vértices. Se ele for conexo, podemos encontrar uma árvore contendo todos os vértices (Dijkstra faz isso, por exemplo). Uma árvore com $n = 100$ vértices tem $n - 1 = 99$ arestas. Logo se o grafo inteiro for conexo, ele tem que tem pelo menos 99 arestas.

(⋆) 6. Prove que se um grafo simples tem 100 vértices e mais de 4851 arestas então ele é conexo.

> *Resposta:* Considere um grafo simples com 100 vértices. *Suponha que ele não é conexo.* Então existe um subconjunto de k vértices (onde $1 \leq k \leq 99$) que não pode ser conectado via caminhos a nenhum dos outros $100 - k$ vértices. Como o grafo é simples, entre esses k vértices temos no máximo $\binom{k}{2}$ arestas (usamos o mesmo raciocínio da solução do exercício 4). Analogamente, existem no máximo $\binom{100-k}{2}$ arestas entre os outros $100 - k$ vértices. Portanto o número de arestas é no máximo
>
> $$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(100-k)(99-k)}{2} = k^2 - 100k + 4950.$$
>
> A função de 2º grau $f(k) = k^2 - 100k + 4950$ atinge seu mínimo em $k = 50$, e tem a concavidade voltada para cima. Logo o valor máximo que $f(k)$ atinge para k entre 1 e 99 é $f(1) = f(99) = 4851$. Assim, mesmo desconhecendo o valor de k, podemos afirmar que o número de arestas é no máximo 4851.
>
> Concluímos que se o grafo tiver mais arestas do que isso, não pode ser conexo.

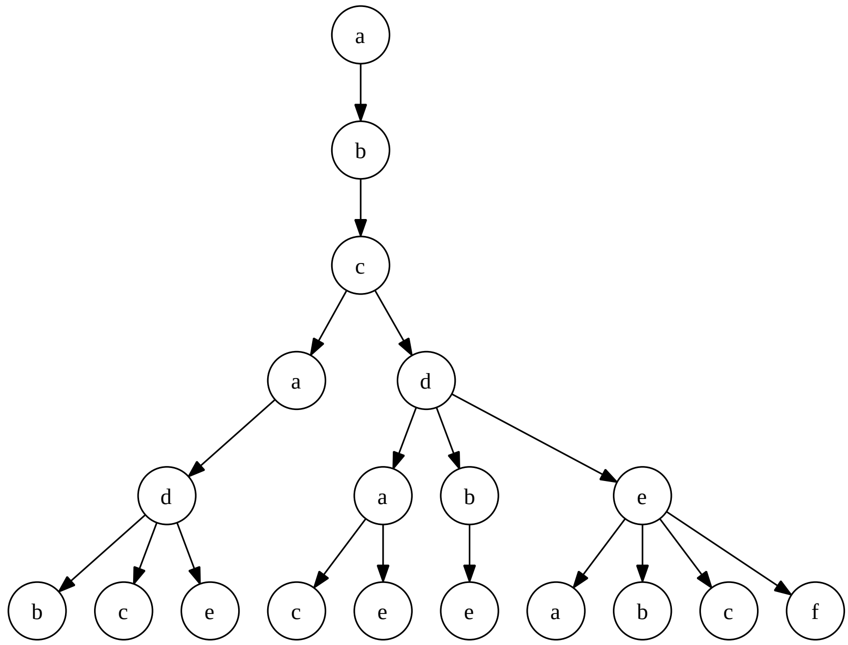
7. Considere o grafo simples com 10 vértices no qual existe uma aresta conectando cada par de vértices (geralmente denotado K_{10}).

   (a) Existem quantos caminhos de comprimento 5 que não repetem vértices?

   > *Resposta:* Basta escolher 6 vértices diferentes, em ordem. A resposta é $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,200$.

(⋆) (b) Existem quantos caminhos de comprimento 5 que não repetem arestas?

   > *Resposta:* Considere um caminho qualquer de comprimento 5 que não repete arestas (que pode evidentemente repetir vértice). Seja a o primeiro vértice, b o segundo, c o terceiro. Então a, b e c são todos diferentes entre si, pois senão alguma aresta seria repetida. Já o quarto vértice pode ser diferente dos 3 primeiros, caso em que o indicaremos por d, ou pode ser a (mas não pode ser b nem c). Continuando desta maneira, temos a seguinte árvore (orientada) de possibilidades, onde letras diferentes designam vértices diferentes:



Das 10 configurações possíveis, 1 envolve 6 vértices diferentes (a–f), 6 envolvem 5 vértices diferentes (a–e), e 3 envolvem 4 vértices diferentes (a–d). Portanto a resposta é:

$$(10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5) + 6 \times (10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6) + 3 \times (10 \times 9 \times 8 \times 7) = 347\,760.$$

8. Determine se existe ou não um grafo com 7 vértices, cujos graus são:

   (a) 0, 2, 2, 2, 4, 4, 6.

   Resposta: Sim, existe: tente fazer o desenho.
   Obs: É fácil ver que não existe grafo *simples* com esses graus.

   (b) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5.

   Resposta: Não. A soma dos graus é ímpar, o que contradiz o teorema do aperto-de-mãos (segundo o qual a soma dos graus é o dobro do número de arestas.)
   Obs: Na verdade, não é difícil provar que existe um grafo com os graus dados *se e somente se* a soma dos graus é par: Conecte dois-a-dois os vértices de grau ímpar, e acrescente laços. Caracterizar quando existe um grafo *simples* com os graus dados é um problema bem mais difícil.

9. Seja G um grafo orientado, e seja A a sua matriz de adjacência orientada.

   (a) O que podemos afirmar sobre G se A tem uma linha formada apenas por zeros?

> *Resposta:* Existe um vértice do qual não há nenhuma aresta *saindo*.

(b) O que podemos afirmar sobre G se A tem uma coluna formada apenas por zeros?

> *Resposta:* Existe um vértice do qual não há nenhuma aresta *entrando*.

10. Suponha que A é a matriz de adjacência de um certo grafo. Sabendo que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

determine:

(a) a quantidade de caminhos de comprimento 3 saindo do vértice 1;

> *Resposta:* A quantidade de caminhos de comprimento k saindo de um vértice i e terminando em um vértice j é a entrada de A^k na linha i e coluna j. Portanto a resposta procurada é a soma das entradas na primeira linha, isto é, $4 + 3 + 5 = 12$ caminhos.

(b) a quantidade de caminhos de comprimento 6 saindo do vértice 2 e terminado no vértice 3.

> *Resposta:* Temos que calcular a entrada da linha 2 e coluna 3 da matriz A^6. Como $A^6 = A^3 \cdot A^3$, a resposta é $3 \times 5 + 4 \times 5 + 5 \times 7 = 70$.

11. Sejam a, v inteiros positivos. Considere o grafo simples com $a + v$ vértices, sendo a deles azuis e v vermelhos, tal que que existe uma aresta ligando dois vértices se e somente se eles são de cores diferentes. Para quais valores de a e v existe *caminho Euleriano* (fechado ou não) neste grafo?

> *Resposta:* Para existir caminho Euleriano, é necessário e suficiente que o número de vértices de grau ímpar seja 0 ou 2. O grafo em questão tem a vértices de grau v e v vértices de grau a. Portanto, as possibilidades são exatamente as seguintes:
>
> - ou a e v são pares;
> - ou a é ímpar e $v = 2$;
> - ou v é ímpar e $a = 2$;
> - ou $a = v = 1$.

12. Seja o grafo simples com 6 vértices A, B, C, D, E, F, e arestas com os seguintes comprimentos:

$$\begin{array}{lllll} AB = 3, & AC = 1, & AD = 4, & AE = 1, & AF = 5. \\ BC = 9, & BD = 2, & BE = 6, & BF = 5, & CD = 3. \\ CE = 5, & CF = 8, & DE = 9, & DF = 7, & EF = 9. \end{array}$$

Aplique o algoritmo de Dijkstra e encontre uma árvore mínima em relação ao vértice A. Dê também a distância de cada vértice a A.

Resposta: A árvore contendo uma aresta ligando A a cada uma dos outros vértices é uma solução A árvore é obtida acrescentando arestas na seguinte ordem: AC, AE, AB, AD (CD poderia ter sido escolhida aqui), AF. A distância de A aos vértices $A - F$ é respectivamente $0, 3, 1, 4, 1, 5$.