

3ª Lista de Matemática Discreta 2010/1 - GABARITO

- a)** Seja $p(n)$ a afirmação (ou a proposição): " $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ".
Queremos mostrar que $p(n), \forall n \geq 1$

> Caso base: vamos mostrar que $p(1)$ vale.

$p(1)$ é " $1 = 1^2$ ", o que é claramente verdade (como costuma acontecer no caso base)

> Passo indutivo: vamos mostrar que, **se vale $p(k)$, então vale $p(k+1)$** . Aqui, $p(k)$ é a nossa hipótese. Assim, quando falarmos "por hipótese", queremos dizer "considerando que $p(k)$ vale".

$p(k)$ é " $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$ "

$p(k+1)$ é " $1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ "

Temos que partir de $p(k)$ e chegar até $p(k+1)$.

Aqui, normalmente temos duas opções: (i) partir de $p(k)$ e chegar até a uma proposição com o lado esquerdo idêntico ao de $p(k+1)$; (ii) fazer isso com o lado direito.

Vamos tentar igualar o lado esquerdo. Veja que basta adicionar $(2k+1)$. Então, por hipótese (sempre deixe bem claro que você está utilizando a hipótese!)...

$$"1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)"$$

O lado esquerdo está idêntico. O lado direito deveria estar também. E está, pois é claro que $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$. Assim,

$1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$, isto é, $p(k+1)$ vale. Concluímos o passo indutivo e a prova por indução.

- b)** Seja $p(n)$ a proposição $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

Queremos mostrar que $p(n), \forall n \geq 1$.

> Caso base: mostrar que $p(1)$ vale. $1 = 1(1 + 1)/2 = 1$. OK.

> Passo indutivo: mostrar que, se vale $p(k)$, vale $p(k + 1)$.

$p(k)$ é $1 + 2 + \dots + k = k(k + 1)/2$

$p(k + 1)$ é $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$

Vamos tentar igualar o lado esquerdo. Por hipótese,

$1 + \dots + k + (k + 1) = k(k + 1)/2 + (k + 1)$. Agora, como sempre ocorre com igualdades, veremos que o lado direito dessa proposição também é igual ao lado direito de $p(k+1)$. Tente fazer essa manipulação simples. O passo indutivo está concluído, assim como a prova por indução.

g) Seja $p(n)$ a proposição $2 + 6 + \dots + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1} - 1$.

Queremos mostrar que $p(n), \forall n \geq 1$.

> Caso base: mostrar que $p(1)$ vale. $2 = 3^1 - 1$. OK.

> Passo indutivo: mostrar que, se vale $p(k)$, vale $p(k+1)$.

$$p(k) \text{ é } \boxed{2 + 6 + \dots + 2 \cdot 3^k = 3^{k+1} - 1}$$

$$p(k+1) \text{ é } \boxed{2 + 6 + \dots + 2 \cdot 3^k + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{k+2} - 1}$$

Vamos tentar igualar o lado esquerdo. Por hipótese,

$2 + 6 + \dots + 2 \cdot 3^k + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{k+1} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1}$. Mas, trabalhando o lado direito, temos:

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1} &= 3^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1} - 1 = \\ &= 3^{k+1}(1 + 2) - 1 = 3^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

Dessa forma, $2 + 6 + \dots + 2 \cdot 3^k + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{k+2} - 1$, ou seja, vale $p(k+1)$.

Veja que, ao igualarmos os lados esquerdos, os lados direitos já ficam também idênticos depois de alguma manipulação (em geral simples).

k) Seja $p(n)$ a proposição $2^n < n!$.

Queremos mostrar que $p(n), \forall n \geq 4$ (preste atenção no 4).

> Caso base: mostrar que $p(4)$ vale. $2^4 = 16 < 24 = 4!$. OK.

> Passo indutivo: mostrar que, se vale $p(k)$, vale $p(k+1)$. Mas $k \geq 4$.

$$p(k) \text{ é } \boxed{2^k < k!}$$

$$p(k+1) \text{ é } \boxed{2^k < (k+1)!}$$

Vamos tentar igualar o lado esquerdo, multiplicando tudo por 2. Por hipótese,

$(2^k) \cdot 2 < (k!) \cdot 2$. Veja que aqui, ao igualarmos o lado esquerdo, não necessariamente igualaremos o lado direito. Isso ocorre porque não precisamos mostrar que o lado direito é **igual** ao lado direito de $p(k+1)$. Precisamos mostrar que o lado direito é **menor ou igual** ao lado direito de $p(k+1)$, ou seja, $(k+1)!$. Mas veja que, como $k \geq 4$,

$$(k+1)! = (k!) \cdot (k+1) \geq (k!) \cdot (4+1) > (k!) \cdot 2,$$

de onde...

$$(2^k) \cdot 2 < (k!) \cdot 2 < (k!) \cdot (k+1) = (k+1)!$$

Em resumo, $2^{k+1} < (k+1)!$, o que conclui o passo indutivo e a prova por indução.

n) Seja $p(n)$ a proposição $(1+x)^n \geq 1+nx$
Queremos mostrar que $p(n), \forall n \geq 1, \forall x > 0$.

> Caso base: mostrar que $p(1)$ vale. $(1+x)^1 = 1+1 \cdot x$. OK.

> Passo indutivo: mostrar que, se vale $p(k)$, vale $p(k+1)$.

$p(k)$ é $(1+x)^k \geq 1+kx$

$p(k+1)$ é $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Vamos igualar o lado esquerdo, multiplicando tudo por $(1+x)$. Por hipótese, $(1+x)^k * (1+x) \geq (1+kx) * (1+x)$. Agora vamos mostrar que o lado direito ficou maior ou igual ao lado direito *de* $p(k+1)$.

$(1+kx) * (1+x) = 1+x+kx^2+kx = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$,
pois $kx^2 \geq 0$ (*lembre que* $k, x \geq 0$). A partir disso,

$$(1+x)^k * (1+x) = (1+x)^{k+1} \geq (1+kx) * (1+x) \geq 1+(k+1)x$$

Em resumo, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. O passo indutivo está concluído, assim como a prova por indução.