5ª lista de Matemática Discreta 2009/2

1. Se p_n denota o n-ésimo primo (ie $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...), prove que:

a) $p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. [Dica: Lembre da prova padrão de que existem infinitos números primos.]

b) $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$. [Dica: use o item anterior.]

2. Os *números de Fermat* são definidos por $F_n = 2^{2^n} + 1$, isto é, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, ...

a) Prove que $F_{n+1} = 2 + F_0 F_1 \cdots F_n$.

b) Mostre que quaisquer dois números de Fermat distintos são primos entre si.

Nota histórica: Pierre de Fermat (1601?–1665) conjecturou que esta fórmula produzia apenas números primos. Isso de fato funciona para $0 \leq n \leq 4$. A conjectura foi refutada por Leonhard Euler, que mostrou (em 1732) que fatorou $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

3. Mostre que quaisquer dois números distintos *consecutivos* na sequência de Fibonacci são primos entre si.

4. Determine dois pares distintos de números inteiros (K, L) tais que $63K + 20L = 1$.

5. Deseja-se comprar exatamente 100 gramas de um produto que só é vendido em embalagens de 13 e 7 gramas. Apresente todas as possibilidades de compra deste produto.

6. Expresse de todas as formas possíveis o número 602 como a soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 30 e o segundo por 14.

7. Mostre que o número $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

8. Determinar todos os naturais menores que 3000 que têm resto 9 na divisão por 37 e simulteneamente resto 15 na divisão por 52.

9. Determine o resto da divisão de $2^{122} \cdot 7^{203} + 5^8$ por 9.

10. Decida se $2^{83} - 1$ é divisível por 6.

11. Determine o algarismo das unidades de 37^{100}.

12. Determine o menor inteiro x de modo que $3^{221} \cdot 7^{343} - x$ seja divisível por 4.

13. Determine o resto da divisão de $4^{125} + 4$ por 5.

14. Sejam inteiros a, b, m, e seja k o mdc entre a e m. Considere a equação $ax \equiv b \mod m$ com incógnita x.

a) Mostre que a equação tem alguma solução se e somente se k divide b.

b) Mostre que o número de soluções da equação incongruentes (mod m) entre si é 0 ou k.

15. Elabore tabelas de inversos multiplicativos (quando existirem) módulo m para $m = 8$, $m = 9$, $m = 10$, $m = 11$.

16. Determine que números possuem raiz quadrada módulo 11. (Isto é, determine para quais inteiros a existe algum x tal que $x^2 \equiv a \mod 11$.)

17. Resolva as seguintes equações (ou sistemas de equações):

- $3x + 4y \equiv 2 \mod 11$, $2x + 3y \equiv 1 \mod 11$.
- $3x^2 + 4x + 3 \equiv 0 \mod 11$.