

MAT1310 – 2009/2 – Lista 4 – Problemas de Contagem / Probabilidade Discreta

Obs: Para diversos exercícios é recomendado usar uma calculadora.

- 1) Uma partícula estando no ponto (x,y) , pode se movimentar para o ponto $(x+1,y+1)$ ou para o ponto $(x+1,y-1)$. Quantos são os trajetos possíveis da partícula de $(0,0)$ a $(10,4)$? R: 120
- 2) Mostre que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100.
- 3) De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama ? R: 2350
- 4) Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter 2 caras? Qual é a probabilidade de obter pelo menos 2 caras ? R: $3/8$ e $1/2$
- 5) Para a Copa do Mundo 24 países são divididos em seis grupos, com 4 países cada um. Supondo que a escolha do grupo de cada país é feita ao acaso, calcule a probabilidade de que dois países determinados (A e B) se encontrem no mesmo grupo. R: $3/23$
- 6) Três dados são jogados simultaneamente. Calcular a probabilidade de se obter 12 como soma dos resultados dos três dados. R: $25/216$
- 7) Sete bolas são distribuídas ao acaso em 7 compartimentos. Mostra que a probabilidade de que todos os compartimentos sejam ocupados é menor que 1%.
- 8) Mostre que num grupo de 35 pessoas, a probabilidade de pelo menos duas delas terem nascido no mesmo dia do ano é maior que 80%.
- 9) Um carro estaciona entre n outros em fila e não numa ponta. Quando o dono retorna ainda estão estacionados m dos n carros. Qual é a probabilidade das duas vagas adjacentes ao seu carro estarem vazias ? R: $[(n-m)(n-m-1)] / [n(n-1)]$
- 10) Seis bolas diferentes são colocadas em três urnas diferentes. Qual é a probabilidade de que todas as urnas estejam ocupadas ? R: $20/27$
- 11) Uma recepcionista recebeu 5 chapéus, mas estes ficaram totalmente misturados. Decidiu então devolvê-los ao acaso. Calcule a probabilidade de que nenhum homem receba o seu chapéu. R: $11/30$
- 12) No início de uma partida de bridge as 52 cartas do baralho são repartidas igualmente entre os 4 jogadores. Qual a probabilidade de cada um dos jogadores receber um ás? (Lembre que um baralho contém 4 ases.) R: $2197/20825=10,5\%$
- 13) Uma moeda honesta é lançada n vezes. Qual a probabilidade de exatamente metade dos resultados ser cara, para $n=20, 50, 100$? R: 18%, 11%, 8%, resp.

- 14) É feito um sorteio de amigo oculto entre n pessoas. Seja $p(n)$ a probabilidade do sorteio ser bem sucedido, isto é, nenhuma pessoa tirou a si própria. Mostre que $p(n)$ está entre 33% e 38% se n for maior ou igual a 3, e entre 36,78% e 36,79% se n for maior ou igual a 7. (Lembre do que foi feito em aula sobre as permutações “caóticas”.)
- 15) Um sorteio de amigo oculto não-padrão no qual algumas pessoas poderão receber mais de um presente é feito da seguinte maneira: Colocam-se em um saco pedaços de papel, cada um com o nome de um dos participantes. Cada participante retira um nome ao acaso, anota, e devolve ao saco. Seja $p(n)$ a probabilidade de que ninguém tenha retirado a si próprio. Calcule $p(10)$. R: 35%. Qual o limite de $p(n)$ quando n tende a infinito? R: $1/e$
- 16) (Use exercício 14) Dez colegas querem fazer um amigo oculto para celebrar o fim do semestre. Se algum retira a si próprio, então todo o sorteio tem que ser refeito. Qual a probabilidade do sorteio ter que ser feito pelo menos 4 vezes? R: 25%
- 17) Recalcule as probabilidades do exercício 13, agora supondo que a moeda é desonesta com probabilidade de cara igual a 40%. R: 12%, 4%, 1%, resp.
- 18) Um congresso de estudantes é realizado em um único dia (que não é o 29 de fevereiro), e reúne 500 pessoas. Qual a probabilidade de nenhum dos participantes estar de aniversário? De existir apenas um aniversariante? Dois aniversariantes? Três aniversariantes? R: 25%, 35%, 24%, 11%, resp. Obs: Caso você conheça a distribuição de Poisson, utilize-a para obter aproximações destas probabilidades, e compare com os resultados obtidos anteriormente.
- 19) Uma determinada cidade possui dois hospitais. No hospital maior nascem aproximadamente 45 bebês por dia, e no hospital menor nascem aproximadamente 15 bebês por dia. Como você sabe, aproximadamente 50% de todos os bebês são meninos. Entretanto, a porcentagem exata varia de um dia pro outro; às vezes pode ser mais de 50%, às vezes menos. Por um período de 1 ano, cada hospital registrou os dias em que mais de 60% dos nascimentos eram de meninos. Que hospital você acha que gravou mais tais dias?