

### 3ª lista de Matemática Discreta 2009/2

#### Números binomiais

1. Demonstre que

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

2. Demonstre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Dica: Use a Fórmula do Binômio.

3. Utilize o resultado do exercício anterior e a propriedade da soma dos elementos das linhas para concluir que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

isto é, na  $n$ -ésima linha, a soma dos elementos nas colunas pares dá  $2^{n-1}$ , e a soma dos elementos nas colunas ímpares também.

4. Comparando os coeficientes de  $x$ ,  $x^2$ , etc na identidade

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n},$$

mostre que

$$\begin{aligned} \binom{m}{1} + \binom{n}{1} &= \binom{m+n}{1} \\ \binom{m}{2} + \binom{m}{1} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} &= \binom{m+n}{2} \end{aligned}$$

e em geral

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \binom{n}{1} + \binom{m}{k-2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{m+n}{k}$$

#### Somas

5. Determine o valor das somas seguintes:

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots + 50 \times 51 \times 52$$

$$1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + \dots + 50 \times 101$$

#### Problemas de contagem

6. Quantas soluções têm a equação  $x + y + z = 30$ , sendo  $x, y, z$  inteiros maiores ou iguais a 7?

7. Quantas soluções têm a equação  $xyzt = 1024$ , sendo  $x, y, z, t$  inteiros maiores ou iguais a 2?

8. Determine o coeficiente de  $x^{15}$  no polinômio

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})^5.$$