$3^{\underline{a}}$ Lista de Matemática Discreta - GABARITO

1. $p * C(n, p) = \frac{p*n!}{(n-p)! * p!} = \frac{p * n * (n-1)!}{(n-p)! * p * (p-1)!} =$

$= n * \frac{(n-1)!}{(n-p)! * (p-1)!} = n * C(n-1, p-1)$

---

2. Pela fórmula do binômio, sabemos que $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} x^i * C(n, i)$
Pondo $x = -1$, temos que

$$(1+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i * C(n, i) =$$

$$= C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) + \ldots + (-1)^{n-1} * C(n,n-1) + (-1)^n * C(n,n)$$

Por outro lado, $(1+(-1))^n = (0)^n = 0$

---

3. Pondo x = 1 em $(1+x)^n$, temos que

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} 1^i * C(n, i) = \sum_{i=0}^{n} C(n, i) =$$
$$= C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n-1) + C(n,n) \text{ [i]}$$

Pondo $x = -1$, temos que

$$(1+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i * C(n, i) =$$

$$= C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) + \ldots + (-1)^{n-1} * C(n,n-1) + (-1)^n * C(n,n) \text{ [ii]}$$

Sabemos que [i] + [ii] = $(1+1)^n + (1+(-1))^n = 2^n + 0^n = 2^n$

Por outro lado, [i] + [ii] **=**

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \ldots + C(n,n-1) + C(n,n)$$

$$+$$

$$C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) + \ldots + (-1)^{n-1} * C(n,n-1) + (-1)^n * C(n,n)$$

Note que os termos C(n, número par) se somam, enquanto os termos C(n,número ímpar) se cancelam, de onde

$$\text{[i] + [ii]} = 2 * [C(n,0) + C(n,2) + C(n,4) + \ldots] = 2^n$$

$$\text{Daí, } C(n,0) + C(n,2) + C(n,4) + \ldots = 2^{n-1}$$

Da expansão de $(1+1)^n$, também deduzimos que

$$C(n,1) + C(n,3) + C(n,5) + \ldots = 2^{n-1}$$

4. Como as duas expressões são idênticas, os coeficientes de cada termo delas (potências de x) devem ser iguais. A primeira coisa a fazer é expandir as expressões. Vamos começar expandindo a primeira...

$$(1+x)^n * (1+x)^m = [\ \textstyle\sum_{i=0}^{n} x^i * C\ (n, i\ )\ ] * [\ \textstyle\sum_{j=0}^{m} x^j * C\ (m, j\ )\ ]$$

Um termo da forma $k\,x^1$ aparece em dois casos:

i = 1 e j = 0 ; i = 0 e j = 1

Veja que o primeiro caso é "pegar" o x^1 * x^0 (olhe as cores!) e o segundo caso é o contrário.

Assim, o coeficiente de x^1 será

$$C\ (n, 1\ ) * C\ (m, 0\ ) + C\ (n, 0\ ) * C\ (m, 1\ ) =$$

$$= C\ (n, 1\ ) + C\ (m, 1\ )$$

Agora vamos para a parte mais fácil, que é avaliar o coeficiente de x^1 em $(1+x)^{m+n}$. Pela aplicação direta da fórmula,

$$(1+x)^{n+m} = \textstyle\sum_{i=0}^{n+m} x^i * C\ (n+m, i\ )$$

Daí, o coeficiente de x^1 é termo que surge quando i = 1. Esse termo é

$$C\ (n+m, 1\ )$$

Com isso concluímos que $C\ (n, 1\ ) + C\ (m, 1\ ) = C\ (n+m, 1\ )$. As outras partes do problema são análogas a essa.

---

5. a) $S = 1x2x3 + 2x3x4 + 3x4x5 + \cdots + 50x51x52$

É recomendável você ir se habituando à notação de somatório, porque ela é bastante útil (principalmente para quem faz gabaritos). Veja que...

$$S = \sum_{i=3}^{52} i * (\ i-1) * (i-2) = \sum_{i=3}^{52} \frac{i * (\ i-1) * (i-2)}{3!} * 3! = \sum_{i=3}^{52} C\ (\ i, 3) * 3! =$$

$$\boxed{= 3! * \sum_{i=3}^{52} C\ (\ i, 3)}$$

O somatório acima representa a soma da coluna 3 do triângulo de Pascal, da linha 3 até a linha 52. Pela propriedade da soma da coluna,

$$S = 3! * \sum_{i=3}^{52} C\ (\ i, 3)\ = 3! * C\ (\ 53, 4\ ) = \ \mathbf{1.756.950}$$

b) $S = 1x3 + 2x5 + 3x7 + \cdots + 50x101$

Veja que…

$$S = \sum_{i=1}^{50} i * (2i+1) = \sum_{i=1}^{50} \frac{2i(\,2i+1)}{2!} = \sum_{i=1}^{50} C\,(\,2i+1\,,2)$$

Por aí, dá para perceber que S é a soma dos primeiros 50 termos do triângulo de Pascal cuja coluna é 2 e a linha é ímpar. Mas não conhecemos uma simplificação para esse tipo de soma - só sabemos, numa certa coluna, somar todos os termos até um certo ponto. Isso sugere...

$$B = \sum_{i=1}^{50} C\,(\,2i,2\,)$$

B é a soma dos primeiros 50 termos do triângulo de Pascal cuja coluna é 2 e a linha é par. Assim...

$$S + B = \sum_{i=1}^{50} C\,(\,2i+1\,,2) \; + \sum_{i=1}^{50} C\,(\,2i,2\,) = \sum_{i=1}^{101} C\,(\,i,2\,) = \; C\,(\,102\,,3\,) \;\; [i]$$

$$S - B = \sum_{i=1}^{50} \{ C\,(\,2i+1\,,2) - \; C\,(\,2i,2\,)\,\} = \sum_{i=1}^{50} 2i = 50x51 \quad [ii]$$

Usando **[i]** e **[ii]**, temos: $\boxed{(S+B)+(S-B) = 2S = C\,(\,102,3\,) + \; 50x51}$

$$\boldsymbol{S = 87125}$$

6. Nós sabemos resolver esse tipo de coisa quando a restrição é algo do tipo “sendo x,y,z inteiros maiores ou iguais a 1”. Nosso sonho portanto é reduzir o problema original a algo desse tipo. A idéia é essa:

$$\boxed{x \;=\; a \;+\; 6\,;\; y \;=\; b \;+ 6\,;\; z \;=\; c \;+\; 6}$$

E a nossa equação fica com essa cara:

(a + 6) + (b+ 6) + (c+6) = a + b + c + (18) = 30 → $\boxed{a+b+c = 12}$

Agora vamos olhar para a restrição:

x,y,z ≥ 7 → (a+6),(b+6),(c+6) ≥ 7 → $\boxed{a, b, c \;\geq 1}$

E então reduzimos um problema estranho a um que já conhecíamos. A resposta portanto é **C (11 , 2) = 55**

7. Cabe aqui fatorar 1024 = 2^{10}. Como x,y,z,t são inteiros, eles serão potências de 2. Então faz sentido e dá vontade reescrever x,y,z,t como potências de 2:

$$\boxed{\mathrm{x} = 2^a\ ;\ \mathrm{y} = 2^b\ ;\ \mathrm{z} = 2^c\ ;\ \mathrm{t} = 2^d}$$

Agora vamos olhar para a equação original de novo:

$$\mathrm{xyzt} = 1024 \rightarrow 2^a * 2^b * 2^c * 2^d = 2^{10} \rightarrow \boxed{a + b + c + d = 10}$$

Como sempre, vamos ver o que aconteceu com a restrição...

$$x, y, z, t \geq 2 \rightarrow 2^a, 2^b, 2^c, 2^d \geq 2^1 \rightarrow \boxed{\mathrm{a, b, c, d} \geq 1}$$

E isso é uma versão do problema [6], apenas com valores diferentes. A resposta final é **C (9 , 3) = 84**.

---

8. Expandindo $(x^1 + x^2 + \ldots + x^{100})^5$, temos uma soma de termos da forma:

$$(x^a * x^b * x^c * x^d * x^e) = x^{a+b+c+d+e}$$

(cada $x^{aluma\ coisa}$ vem de um dos cinco somatórios)

Um termo desse tipo tem 15 como expoente quando $x^{a+b+c+d+e} = x^{15}$, o que implica...

$$\boxed{a + b + c + d + e = 15}\ \text{, com }\ \boxed{\mathrm{a, b, c, d, e} \geq 0}$$

Assim caímos num problema já conhecido.

Resposta: $C\ (\ 19, 4\ ) = \mathbf{3876}$