5^{a} Lista de Matemática Discreta - GABARITO

4. Condição de existência: MDC(63,20) deve ser divisor de 1. Como MDC(63,20) = 1, isso é verdade. Agora vamos procurar uma solução particular para a equação. Ela será obtida com o algoritmo de Euclides.

	3	6	1	2	
63	20	3	2	1	0

Assim,

$$1 = 3 - 2x1 = 3 - (20 - 3x6)x1 = 3x7 - 20x1 =$$
$$= (63 - 20x3)x7 - 20x1 = 63x7 - 20x22$$

Uma solução particular é (7,-22). A solução geral é (7 - 20t , -22 + 63t).

---

5. Comprando **x** embalagens de 7 gramas e **y** embalagens de 13 gramas, o peso total é 7x + 13y. Queremos, portanto, os pares (x,y) de inteiros positivos tais que **7x + 13y =100**.

Condição de existência: MDC(7,13) deve ser divisor de 1, o que de fato ocorre. Em geral, um possível passo seguinte é dividir a equação por MDC(7,13), que nesse caso é 1 e por isso a divisão não muda nada.

Para ilustrar, seja d = MDC(7,13). Podemos reescrever a equação dessa forma:

$$(7/d)x + (13/d)y = 100/d.$$

Essa passaria a ser a nova equação a ser solucionada. Como d = 1, nada muda. Vamos usar o algoritmo de Euclides para achar uma solução da equação

(200-13t, -100+7t)

$$7x + 13y = 1$$

O algoritmo de Euclides oferece a solução (2,-1). Então...

O par 100*(2,-1) = (200,-100) é uma solução de **7x + 13y =100.**
A solução geral é (200 - 7t, -100 + 13t).

Finalmente, precisamos escolher os valores de t tais que a nossa solução, (200 - 7t, -100 + 13t), tenha valores positivos. Fazendo contas, concluímos que **8 ≤ t ≤ 28**.

t=15, x=5, y=5.

---

6. Sejam **b,c** inteiros positivos tais que $\boxed{b + c = 602}$. Se é **b** divisível por 30 e **c** por 14, existem **x,y** tais que **c = 30x** e **d = 14y**. Daí, a nossa equação fica assim:

$$30x + 14y = 602$$

Como sempre, condição de existência: MDC(30,14) deve ser divisor de 602. Como MDC(30,14) = 2 e 2 divide 602, isso é verdade. Agora, vamos dividir a equação por MDC(30,14) para trabalhar com números menores. Obtemos...

$$15x + 7y = 301 \text{ [i]}$$

Vamos usar o algoritmo de Euclides para achar uma solução da equação

$$15x + 7y = 1$$

Uma solução é (x,y) = (1,-2), de onde uma solução para [i] é (301,-602). Além disso, como dividimos a nossa equação pelo MDC(30,14), é fácil achar a solução geral: (x,y) = (301 - 7t , -602 + 15t).

Finalmente, fazendo contas, x,y ≥ 0 para os valores de t tais que **41 ≤ t ≤ 42**.

7. Precisamos mostrar que $2^{70} + 3^{70} = 0\ mod 13$. Vamos calcular separadamente $2^{70} mod 13$ e $3^{70} mod 13$.

$2^6 \equiv -1 \rightarrow 2^{70} = (2^6)^{11} * 2^4 \equiv (-1)^{11} * 16 \equiv -16 \equiv 10$
$3^3 \equiv 1 \rightarrow 3^{70} = (2^3)^{23} * 3^1 \equiv (1)^{23} * 3 \equiv 3$

Daí, $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 0\ mod 13$

---

8. Seja **x** um natural que satisfaz as condições do problema. Então

$$x = 9 mod 37\ ;\ x = 15 mod 52.$$

Assim, x = 37a + 9 ; x = 52b + 15 → $\boxed{37a - 52b = 6}$. E caímos num problema já conhecido.

14. Veja que a equação pode ser considerada uma equação diofantina com duas incógnitas. Use o que você sabe sobre o **Teorema de Bézout**.