LISTA 5 DE ANÁLISE REAL 2009

RICARDO SA EARP

Compacidade, conexidade e continuidade em espaços métricos

(1) Deduza as afirmações abaixo:
   (a) Seja A um conjunto limitado não compacto de $\mathbb{R}$. Segue então que existe uma função contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada e existe $g : A \to \mathbb{R}$ limitada, mas o $\sup_x f(x)$ não é atingido.
   (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ contínua tal que $f(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$. Segue então que f assume um máximo global.
   (c) Todo conjunto infinito limitado de $\mathbb{R}^n$ possui um ponto de acumulação.
   (d) Toda sequência limitada de $\mathbb{R}^n$ possui um valor aderente.
   (e) Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ tal que toda subsequência converge para o mesmo ponto a de $\mathbb{R}^N$. Segue então que $x_n \to a$, quando $n \to \infty$.

(2) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Definimos:
   $$f(x) := \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
   que se chama de distância de x ao conjunto A. Deduza:
   (a) f é Lipschitz, logo uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.
   (b) Dê uma caracterização da aderência $\overline{A}$ de A em termos de $f(x)$.
   (c) Deduza que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \text{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de A e de $\overline{A}$.
   (d) Dados dois conjuntos A, B de $\mathbb{R}^n$ defina $\text{dist}(A, B)$, a distância de A a B. Conclua que se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$. Mostre ainda que isto é falso se A e B forem apenas fechados.

(3) Deduza que a esfera unitária $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ é um conjunto conexo. Seja $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Deduza que existe $p \in \mathbb{R}$; $f(p) = f(-p)$.

(4) Sejam $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) < g(0)$. Exiba condições suficientes para que exista um ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Exiba condições suficientes

para que exista um único ponto $y > 0$, tal que $f(y) = g(y)$. Dê exemplos explícitos de ambas as situações.

(5) Seja $f : X \to Y$, uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto X em um espaço métrico Y. Deduza que f é uniformemente contínua.
   (a) Deduza que $f(x) = \sqrt{x}$ é Lipschitz para $x \geqslant a > 0$ e uniformente contínuma, mas não Lipschitz em $[0, \infty)$.
   (b) Estenda o que foi feito no item anterior para a função $f(x) = x^{1/p}, x \geqslant 0, p \in \mathbb{Z}^+$.
   (c) Seja X um subconjunto da reta real $\mathbb{R}$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a X, então limite $\lim_{x\to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformente contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, (i. e, $F|_X = f$, F restrita a X é igual à f) que é uniformemente contínua. Além disso, conclua que se X é limitado, então $f(X)$ é limitado.
   (d) Dê exemplos de funções contínuas definidas em $(0, 1]$ que não são uniformente contínuas.
   (e) Estabeleça um critério usando sequências para que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *não seja uniformente contínua.* Aplique para deduzir que $f(x) = x^3$ não é uniformemente em $\mathbb{R}$.

(6) Seja X um subconjunto de um espaço métrico Z. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma aplicação uniformemente contínua. Deduza que se a é um valor aderente a $X \subset Z$ (imagine X contido num espaço métrico ambiente Z, digamos $Z = \mathbb{R}^n$), então limite $\lim_{x\to a} f(x)$, existe. Conclua que toda aplicação uniformemente contínua $f : X \to \mathbb{R}$, admite uma única extensão contínua $F : \overline{X} \to \mathbb{R}$, que é além disso uniformemente contínua.

(7) Generalize o item anterior para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \subset Z \to Y$, de um espaço métrico $X \subset Z$ num espaço métrico completo Y.

(8) (*Teorema do ponto fixo de Brouwer*) Deduza que toda aplicação contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ possui um ponto fixo, isto é $f(x) = x$ para algum $x \in [0, 1]$. Estabeleça alguma condição que garanta que o ponto fixo é único.

(9) Seja A um conjunto conexo de $\mathbb{R}^n$. Deduza que se B satisfaz $A \subset B \subset \overline{A}$ então B é conexo. Em particular, conclua que $\overline{A}$ é conexo.

(10) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real convexa que não é injetora. Deduza que f assume um mínimo global.