INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES COM CURVATURA MÉDIA 1 NO ESPAÇO HIPERBÓLICO -2001.1–Lista3

Professor: Ricardo Sá Earp

Vamos fazer um estudo sucinto sobre superfícies de $\mathbb{R}^3$, principalmente superfícies mínimas. Vamos explorar certas propriedades de certas superfícies especiais, tais como superfícies de curvatura média constante e superfícies de Weingarten. Também veremos um pouco de superfícies no espaço hiperbólico. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Vamos aplicar as equações de compatibilidade; equação de curvatura de Gauss e equação de Codazzi-Mainardi.

Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de $\mathbb{H}^3$ para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de $\mathbb{R}^3$, tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões .

1) Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G, são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n, os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p. Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2.

   a) O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S. Define-se o *gradiente* de f, denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

onde v é tangente à S em p, isto é $v \in T_pS$.

i) Mostre que

$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$

onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

b) Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e $Y(p) \in T_pS$), denotada por div, como sendo o traço da aplicação $Z \to D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S, e D é a conexão Riemanniana de S. Ou seja,

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(Z \to D_Z Y)$$

i) Mostre

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial u}(Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v}(Y \cdot X_v)\right)$$

c) Define-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por $\triangle f$, como sendo

$$\triangle f = \operatorname{div} \nabla f$$

i) Mostre

$$\triangle f(p) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\right)$$

onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

d) Mostre que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*.

e) Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme* z está definido como

$$\triangle_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

i) Mostre que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z, uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso mostre que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item c).

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S. O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int_S \operatorname{div} Y \,\mathrm{d}A = -\int_{\partial S} Y \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ é o elemento de área de S, ∂S é o bordo de S, $\mathrm{d}s$ é o elemento comprimento de arco de ∂S, e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S, normal à ∂S, apontando para dentro de S).

i) Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em $\mathbb{R}^3$, por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S. Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano-xy, de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um "sólido " de $\mathbb{R}^3$, e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura !). Seja $\triangle_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$6\mathrm{vol}(V) + 2\int_S X \cdot N \,\mathrm{d}A = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em $\mathbb{R}^3$)

ii) Mostre que

$$\triangle |X|^2 = 4 + 4HX \cdot N$$

iii) Aplique agora o teorema da divergência *em* S mostrando que

$$\int_S \triangle |X|^2 \,\mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S.

iv) Levando em conta os resultados obtidos nos itens ii) e iii) deduza que

$$4\,\text{área}(S) + 4H \int_S X \cdot N \,\mathrm{d}A = -2 \int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

v) Juntando os resultados obtidos nos itens i) e iv) infira

$$2\,\text{área}(S) = 6H\text{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

f) (*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S. Seja ν o co-normal *exterior* ao longo de ∂S.

i) Seja W um campo de vetores suaves em $\mathbb{R}^3$. Considere a componente tangencial W^T de W, ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S. Mostre que

$$W^T = W - (W \cdot N)\,N$$

ii) Seja v um campo *constante* em $\mathbb{R}^3$. Mostre que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em $\mathbb{R}^3$. *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Mostre ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \,\mathrm{d}s = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ, tem-se que $\int_\gamma \nu \,\mathrm{d}s$, é um invariante de homologia.

O fluxo ao longo de γ está definido pela quantidade

$$\text{Fluxo}([\gamma]) := \int_\gamma \nu \,\mathrm{d}s$$

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \, \mathrm{d}A$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$, tem *fluxo vertical* (i. e o fluxo, Fluxo($[\gamma]$), é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$), então S é o plano o catenóide. Veja ref. 7. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{S}$ de gênero g, removido um conjunto finito de pontos, chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f \, \mathrm{d}z)$ se estendem meromorficamente à $\overline{S}$ (*Teorema de Osserman*).

Mostre usando fluxo que as únicas superfícies mínimas de revolução são os catenóides !!

Você saberia estabelecer uma fórmula do fluxo para superfícies com curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ ***?*** (cf. na ref 1.) E em $\mathbb{H}^3$? (veja ref. 1).

g) Mostre que *em parâmetros isotérmicas* $z = u + iv$, tem-se que:

i) A curvatura média H e a curvatura de Gauss K de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ são dados por

$$H = \frac{l+n}{2E} \qquad \text{e} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{ln} - \mathrm{m}^2}{\mathrm{E}^2}$$

Idem para uma superfície S imersa em $\mathbb{H}^3$.

ii) Deduza que equação das linhas de curvatura *via o método dos multiplicadores de Lagrange*, e infira que em coordenadas isotérmicas a equação das linhas de curvatura é dada por

$$-m \, \mathrm{d}u^2 + (l-n) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + m \, \mathrm{d}v^2 = 0$$

h) Mostre as equações de Codazzi-Mainardi:

$$l_v - m_u = \frac{E_v}{2E}(l+n)$$
$$m_v - n_u = -\frac{E_u}{2E}(l+n)$$

Conclua

i) As equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_u + m_v = EH_u$$
$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_v - m_u = -EH_v$$

Sugestão : Parta dos termos a esquerda das equações propostas substituindo os termos pelas definições , em seguide use o fato de que N é normal unitário, X_u e X_v tangentes ortogonais e de mesmo módulo, aplicando simetria e compatibilidade com a métrica, para chegar ao resultado desejado.

Deduza

ii) Se $\varphi = \dfrac{l-n}{2} - im$, as equações de Codazzi tomam a *forma complexa*

$$\varphi_{\overline{z}} = EH_z$$

A equação (ou as equações) de Codazzi-Mainardi são *as mesmas* no espaço hiperbólico. Verifique isto ! onde $2\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}$, e $2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial}{\partial u} + i\dfrac{\partial}{\partial v}$. Infira que S tem curvatura média contante, sse φ é holomorfa. Mostre que isto implica que os pontos umbílicos de uma superfície conexa S imersa em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média contante são isolados ou S é totalmente umbílica. Mostre o mesmo para uma superfície de curvatura média constante imersa em $\mathbb{H}^3$.

iii) Mostre ainda que as linhas de curvatura são dadas pela equação

$$\operatorname{Im}\left(\varphi \cdot (\mathrm{d}z)^2\right) = 0$$

Nota: Um fato que pode ser demonstrado é que quando S (conexa) tem curvatura média constante, o índice do campo de linhas de curvatura num ponto singular (i. e num ponto umbílico, necessariamente isolado, se S não é totalmente umbílica) é estritamente negativo. Segue disto, e do teorema de Poincaré-Hopf, o seguinte teorema de Hopf demonstrado nos meados do século vinte. Tal resultado deu um novo impulso à teoria das superfícies de curvatura média constante:

Se uma superfície fechada imersa S em $\mathbb{R}^3$ (não necessariamente mergulhada), topologicamente equivalente a esfera , tem curvatura média constante então S é uma esfera geométrica. Enuncie e demonstre o correspondente teorema de Hopf no espaço hiperbólico.

iv) Mostre que quando S tem curvatura média constante a diferencial holomorfa quadrática

$$\varphi \cdot (\mathrm{d}z)^2$$

está globalmente bem definida em S, i. e não depende das escolhas dos parâmetros isotérmicos.

i) Mostre a seguinte fórmula

$$\triangle X = 2\,\overrightarrow{H}$$

onde $\overrightarrow{H}$ ó vetor curvatura média de S (Note que você pode interpretar X como sendo o vetor posição de S).

Conclua a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

$$S \quad \text{é mínima} \qquad \Longleftrightarrow \triangle X = 0$$

Ou seja S é mínima, sse as coordenadas de S em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas.

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

2) Seja S uma superfície mínima simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ e $z = u + iv$ parâmetros isotérmicos. Vamos obter "meromorphic data" $(g, f\,\mathrm{d}z)$ que determinam a imersão mínima $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) := X_u - iX_v$$

a) Mostre que $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos, sse $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$.

b) Mostre que X é harmônica, sse Φ é holomorfa.

c) Mostre que X é regular e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos (ou seja $E \neq 0$), sse $\sum |\Phi_j|^2 \neq 0$ e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos.

d) Mostre que

$$X(z) = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

e) Mostre que se X não é *plana* então $\Phi_1 \not\equiv i\Phi_2$, e $\Phi_3 \not\equiv 0$. Neste caso, existe uma função holomorfa $2f := \Phi_1 - i\Phi_2$ em U e uma função meromorfa $g := \dfrac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, de maneira que podemos escrever (fazendo um abuso de notação) a *representação de Weierstrass*

$$X(z) = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \left((1-g^2) f\, dz, i(1+g^2) f\, dz, 2gf\, dz\right)$$

Mostre que a superfície será regular sse f se anula *apenas* nos pólos de g e a ordem de cada zero nestes pontos é exatamente o dobro da ordem do pólo de g.

i) Mostre que a métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \left(|f|(1+|g|^2)\right)^2 |\,\mathrm{d}z|^2$$

ii) Mostre que a segunda forma fundamental II é dada por

$$II = -2\mathrm{Re}\,(f\, dz\, dg)$$

f) A finalidade deste exercício é mostrar que g é exatamente a composta da aplicação normal de Gauss com a projeção estereográfica do *pólo norte*, que tem que ser conforme, sse S é mínima (por quê ?).

i) Mostre que

$$X_u \times X_v = \left(\mathrm{Im}(\overline{\Phi_3}\Phi_2), \mathrm{Im}(\overline{\Phi_1}\Phi_3), \mathrm{Im}(\overline{\Phi_2}\Phi_1)\right)$$

Conclua

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\mathrm{Re}\, g}{1+|g|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}\, g}{1+|g|^2}, \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2}\right)$$

Infira daí o desejado.

g) Mostre que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima pode ser expressa em termos de f, g

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$$

h) Vamos neste item re-obter superfícies mínimas clássicas via a representação de Weierstrass

i) Mostre que o catenóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = z, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$.

ii) Mostre que o helicóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = \mathrm{e}^z$, $f(z)\,\mathrm{d}z = i\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$.

iii) Mostre que Enneper pode ser obtida fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = z$, $f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z$. Nota: O catenóide é a única superfície mínima de revolução . O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total -4π. Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e gênero zero, então S tem que ser o plano ou o catenóide (*Teorema de Lopez-Ros*). Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e dois fins, então S tem que ser o catenóide (*Teorema de R. Schoen*): A hipótese de curvatura total finita pode ser relaxada e substituída pela hipótese bem mais fraca de *topologia finita* (*Teorema de P. Collin*).

iv) Obtenha a representação de Weierstrass da família catenóide-helicóide de superfícies mínimas associadas, localmente isométricas, ao catenóide (helicóide).

$\imath$) Vamos ver outros exemplos de superfícies mínimas

i_1) A superfície de Scherk é dada implicitamente por

$$\mathrm{e}^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Estude o seu gráfico relacionando com o *princípio de reflexão de Schwarz para superfícies mínimas*. Nota: Scherk foi obtida pelo método de separação das variáveis.

i_2) Considere $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}, g(z) = e^{\frac{1}{z}}, f(z)\,dz = \dfrac{dz}{z^2\, e^{\frac{1}{z}}}$. Calcule Φ_1, Φ_2, Φ_3. Mostre que a condição de zeros e pólos de f, g estão satisfeitas. Para que a imersão esteja bem definida é necessário verificar as *condições de período*: Basta considerar uma curva de Jordan em torno de 0 e calcular os resíduos de Φ_1, Φ_2, Φ_3 na singularidade 0, e mostrar que parte real do resíduo é real. Conclua que $(g, f\,dz)$ define uma imersão conforme mínima de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que a imersão é completa e de curvatura total $-\infty$. *Sugestão* : Para mostrar o último ponto você terá que usar o grande teorema de Picard.

i_3) Encontre você mesmo, via Weierstrass, várias superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$.

j) Mostre o seguinte *teorema de Osserman*: Seja $f(z)$ uma função analítica que não se anula, definida num anel $0 < r_1 < |z| < \infty$. Suponha que para cada caminho γ que *diverge para o infinito*, tem-se que

$$\int_\gamma |f(z)||\,dz| = \infty$$

Segue que que $f(z)$ tem no máximo um pólo no infinito. Explique o que isto quer dizer. Conclua daí que a representação de Weierstrass (g, ω) de uma superfície mínima completa imersa em $\mathbb{R}^3$ tem uma certa propriedade especial.

k) Mostre o seguinte *teorema de Osserman*: Seja M uma superfície de Riemann completa imersa em $\mathbb{R}^3$. Vale

$$\int_M K\,dA \leqslant 2\pi(\chi - \kappa)$$

onde K é a curvatura de Gauss, χ é a característica de Euler e κ é o número de *fins*. Quando é que vale a igualdade ? Vale a igualdade quando M é mergulhada ? Exiba exemplos !!!!!

l) Mostre que a *superfície de Jorge-Meeks*, dada pelo par de Weierstrass $M = \mathbb{C}\cup\{\infty\}\setminus\{z^{n+1} = 1\}, \quad g(z) = z^n, \quad \omega = \dfrac{dz}{(z^{n+1}-1)^2}$, tem as seguintes propriedades:

l_1) Determina uma superfície mínima completa, imersa e não mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

l_2) Admite um plano de simetria que corta a superfície ortogonalmente.

l_3) É invariante pela rotação vertical de argumento $\dfrac{2\pi}{n+1}$.

m) Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme e mínima. Mostre que num ponto p da superfície a interseção do plano tangente da superfície em p com a superfície consiste de $2k$ semi-curvas saindo de p, de maneira que o ângulo de duas curvas consecutivas é sempre igual a $\dfrac{\pi}{k}$, onde k é um inteiro $\geqslant 2$.

n) Considere $(g(z), f(z)\,\mathrm{d}\,z),\ z \in \mathcal{D}^*$ a representação de Weierstrass de um *fim* mínimo completo de curvatura total finita. Suponha que a aplicação de Gauss no *infinito* corresponde ao pólo sul da esfera $\mathbb{S}^2$.

n_1) Mostre que sea aplicação normal ne Gauss é limitada então o *puncture* 0 é um pólo de f de ordem pelo menos igual a 2. Além disso mostre que se a ordem de f é n então a imersão dá $n-1$ voltas em torno do eixo vertical. O quê você pode dizer quando o *fim* é mergulhado ?

n_2) Mostre que se o fim é mergulhado e $g_z(0) = 0$, então o fim converge a um plano ortogonal à $g(0)$.

o) Seja M uma superfície mínima completa, globalmente mergulhada em $\mathbb{R}^3$, com curvatura total finita e r fins. Mostre que g assume no máximo 2 valores antípodas nos fins. Agora suponha que a curvatura de Gauss K é estritamente negativa, i. e $K < 0$. Mostre que M necessariamente é um catenóide.

3) Vamos fazer agora algumas perguntas sobre superfícies de curvatura média constante de $\mathbb{H}^3$.

a) Mostre que uma superfície de curvatura média constante (não nula) de $\mathbb{H}^3$ é sempre orientável.

b) É sabido que um *gráfico geodésico* cujo bordo está contido num plano totalmente geodésico de curvatura média constante H tem altura máxima $\operatorname{artgh}(1/|H|)$, estimativa esta realizada pelo hemisfério da esfera geodésica de raio R; $\operatorname{cotgh} R = |H|$ (veja as refs 13 e 17). Mostre que se S é uma superfície conexa mergulhada com $H =$ constante, de modo que $S \cap \{y = 0\} = \partial S$ (S está de um lado do plano-xz (modelo do semi-espaço)) então a distância máxima de S ao plano-xz é $\operatorname{arctgh}(2/|H|)$. Sugestão : Aplique o princípio do máximo e o princípio de reflexão de

Alexandrov de forma conveniente.

c) Mostre que se S é uma superfície de curvatura média constante (não nula), com bordo uma curva γ plana simples fechada (i. e o traço de γ está contido num plano totalmente geodésico), então a configuração $S \cap \mathrm{Int}(\gamma) \neq \emptyset$ e $S \cap \mathrm{Ext}(\gamma) = \emptyset$ é impossível. *Sugestão* : Aplique a *fórmula do fluxo* dada em sala de aula, *adaptada ao espaço hiperbólico*, convenientemente (veja exerc.2), f)) e ref. 1)

d) Mostre que se uma superfície com $H = \mathrm{cst} \neq 0$ propriamente mergulhada e completa em $\mathbb{R}^3$ tem dois fins tipo anel convergindo para dois cilindros então os cilindros têm que ser paralelos. O quê acontece na mesma situação em $\mathbb{H}^3$?

4) Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ e seja N um campo de vetores normal (unitário) à S. A *superfície paralela* à S está definida por

$$S_t = S + tN$$

Você deve definir um conceito análogo no espaço hiperbólico.

a) Mostre que nos pontos regulares da superfície a curvatura média H_t e a curvatura de Gauss K_t de S_t são dadas por

$$H_t = \frac{H - Kt}{1 - 2Ht + Kt^2} \qquad K_t = \frac{K}{1 - 2Ht + Kt^2}$$

i) Assuma que H é uma constante positiva. Assuma também que M é completa com curvatura de Gauss K limitada. Mostre que as curvaturas média H_t e de Gauss K_t satisfazem a seguinte relação de *Weingarten*

$$2aH_t + K_t = b, \qquad a > 0, b \geqslant 0$$

para t suficientemente pequeno bem escolhido.

ii) Mostre ainda que quando $H = 0$ e $K >> -\infty$, M_t é imersa quando t é suficientemente pequeno. Dê um exemplo de um *fim* de uma superfície mínima tal que $K_t \to -\infty$, quando $\underset{p \in S_t}{\mathrm{p}} \to \partial S_t$.

iii) Finalmente mostre que, nas hipóteses do item i), M_t é uma *superfície especial de Weingarten* (veja refs. 16, 18, 19, 21), ou seja existe uma função de classe C^1, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que as curvaturas média e de Gauss satisfazem uma relação da forma

$$H_t = f(H_t^2 - K_t)$$

para f *elíptica*, i. e f satisfazendo

$$4t\,(f'(t))^2 < 1.$$

Conclua também que dentro de uma mesma classe de superfícies especiais de Weingarten existe uma bem determinada superfície totalmente umbílica.

b) Considere uma superfície imersa S em $\mathbb{R}^3$ orientada por campo de vetores normal unitário N. Assuma que a curvatura média H é positiva e assuma que S satisfaz uma relação de Weingarten da forma

$$2aH + K = b, \qquad a > 0, b > 0$$

Que considerações e resultados análogos ao do item anterior você pode deduzir ?

5) Deduza a classificação das superfícies isoparamétricas de $\mathbb{H}^3$, seguindo o seguinte roteiro : Seja $p \in M$, um ponto não umbílico de uma superfície M em $\mathbb{H}^3$.

(i) Mostre que existe um referencial ortornormal $\{X_1, X_2\}$ numa vizinhança de p *principal*, i.e, $AX_i = k_i\,X_i, i = 1, 2$, onde A é o *operador de Weingarten* que representa a segunda forma fundamental de M.

ii) Seja ∇ a conexão de M. Mostre que as quantidades $\nabla_{X_2}X_1$, $\nabla_{X_1}X_2$, $\nabla_{X_1}X_1$, $\nabla_{X_2}X_2$ estão determinadas por funções a, b que dependem apenas de k_1, k_2 e das suas derivadas com respeito a X_1, X_2. Precisamente, mostre que numa vizinhança u de p:

$$(1) \begin{cases} \nabla_{X_2}X_1 = b\,X_2 & \nabla_{X_1}X_2 = a\,X_1 \\ \nabla_{X_2}X_2 = -b\,X_1 & \nabla_{X_1}X_1 = -a\,X_2 \end{cases} \qquad [X_1, X_2] = a\,X_1 - b\,X_2$$

onde $a = \dfrac{X_2(k_1)}{k_2 - k_1}$ e $b = -\dfrac{X_1(k_2)}{k_2 - k_1}$. Além disto, mostre que

$$\begin{aligned} K_e := k_1\,k_2 = & \frac{(X_1^2(k_2) - X_2^2(k_1))(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_1(k_2)(2X_1(k_2) - X_1(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_2(k_1)(X_2(k_2) - 2X_2(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} + 1 \end{aligned} \tag{2}$$

em U. *Sugestões*: As equações (1) seguem da compatibilidade, da simetria e das equações de Codazzi. Enquanto que a equação (2) segue da equação de curvatura de Gauss.

iii) Mostre que existe um sistema de coordenadas principais numa vizinhança de p. *Sugestão*: Basta mostrar que existem campos $Y_1 = f\,X_1$ e $Y_2 = g\,X_2$; tais que $[Y_1, Y_2] = 0$. Conclua que uma superfície isoparamétrica (i.e todas as curvaturas principais são constantes), *não umbílica* é um cilindro hiperbólico.

6) Neste item serão abordados algumas aplicações do princípio do máximo e do princípio de reflexão de Alexandrov.

a) Mostre que uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{H}^3$ de curvatura média constante cujo bordo assimptótico é um ponto é uma horosfera. E se o bordo assimptótico for um círculo ? E se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

b) Mostre que o seguinte *teorema de Hsiang*: Uma superfície propriamente mergulhada de $\mathbb{H}^{n+1}$ contida dentro de um cilindro, com curvatura média constante é uma hipersuperfície de revolução. O que você pode dizer, sob as mesmas condições , se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

c) Mostre que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém discos de raios arbitrariamente grandes então não existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e um número positivo $c > 0$ tal que a curvatura média H do gráfico de f satisfaça $H \geqslant c > 0$

d) Mostre que não existe um gráfico vertical mínimo em $\mathbb{H}^{n+1}$ sobre um semi- espaço fechado do bordo assimptótico $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

Verifique com cuidados as propriedades geométricas estudadas nesta lista no $\mathbb{R}^3$ que são válidas para superfícies do espaço hiperbólico.

BIBLIOGRAFIA

1. João Lucas Marques Barbosa e Ricardo Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with convex planar boundary, II.* Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grénoble, **16**, 43-79, 1998.

2. João Lucas Barbosa e A. Gervásio Colares. *Minimal surfaces in R^3*. Monografias de matemática **40**, IMPA.

3. F. Braga Brito, W. Meeks III, H. Rosenberg e R. Sa Earp. *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve.* Indiana Univ. Math. J. **40**, 333-343, 1991.

4. Manfredo do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

5. Celso Costa. *Funções algébricas e superfícies mínimas.* Notas do 18° Colóquio brasileiro de matemática, IMPA.

6. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

7. David Hoffman. *Surfaces of constant curvature in manifold of constant curvature.* J. Diff. Geom. **8**, 161-176, 1973.

8. David Hoffmann e Herman Karcher. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature.* R. Ossermann (Ed.), Geometry V, Springer, 1997.

9. David Hoffman e William Meeks III. *Minimal surfaces based on the catenoid.* Am. Math. Mon. **97** (8), 702-730, 1990.

10. Heinz Hopf. *Differential Geometry in the large* . Lecture notes in mathematics, **1000**, Springer, 1989.

11. A. Huber. *On subharmonic functions and differential geometry in the large.* Comm. Math. Helv. **32**, 13-72, 1957.

12. K. Kenmotsu. *Lectures on deformable surfaces in R^3*. Preprint, 1995.

13. N. Korevaar, R. Kusner, W. Meeks III and B. Solomon. *Constant mean*

curvature surfaces in hyperbolic space. Am. J. Math. **114**, 1-43, 1992.

14. William Meeks III. *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature.* J. Diff. Geom. **16**, 161-177, 1981.

15. Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces.* Dover Public. Inc, N. Y, 1986.

16. Murray H. Protter e Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice-Hall, 1967.

17. H. Rosenberg e R. Sa Earp. *The geometry of properly embedded special surfaces in R^3; e. g, surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive.* Duke Math. J. **73** (2), 291-306, 1994.

18. Ricardo Sá Earp. *Uma fórmula do fluxo para superfícies compactas de curvatura média constante em R^3 com bordo planar.* Revista Unimar, **15** (3), 229-247, 1993.

19. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal.* Bol. Soc. Bras. Mat. **26** (2), 129-148, 1995.

20. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Classification des surfaces de type Delaunay.* Amer. J. Math. **121**, 671-700, 1999.

21. Ricardo Sá Earp e Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot, multimedia, 1997.

22. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Symmetry of properly embedded special Weingarten surfaces in H^3.* Trans. Amer. Math. Soc. **351**, 4693-4711, 1999.

23. F. Pécastaings et J. Sevin. *Chemins vers la géométrie* . Mathématiques supérieures. Premier cycle universitaire. Vuibert, 1981.

24. Jorge Sotomaior e Carlos Gutierrez. *Structurally stable configurations of lines of curvature and umbilic points on surfaces.* Monografias del IMCA, 1998.

25. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* vol. 3, second edition. Publish or Perish, 1979.

26. J. J. Stoker. *Differential Geometry.* Academic Press, N. Y. , 1959.

27. Dirk Struik. *Lectures on classical differential geometry.* Addison-Wesley,

1950.

28. Paulo Ventura Araújo. *Geometria Diferential.* Coleção matemática universitária. CNpq-IMPA, 1998.

29. *Courbes Mathématiques.* Revue du Palais de la Découverte, No 45, 1995.