GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista9

Professor: Ricardo Sá Earp

Vamos continuar o nosso estudo sobre superfícies de $\mathbb{R}^3$. Vamos explorar certas superfícies especiais, tais como superfícies mínimas, superfícies de curvatura média constante. As superfícies especiais de Weingarten serão tratadas na próxima lista. Vamos explorar e aplicar conceitos importantes tais como equações das geodésicas, fluxo, fórmula do fluxo, princípio do máximo, dentre outros. Vamos aplicar as equações de compatibilidade; equação de curvatura de Gauss e equação de Codazzi-Mainardi.

Você deve fazer um paralelo comparativo com as superfícies de $\mathbb{H}^3$ para entender os conceitos, as fórmulas, os resultados que continuam válidos quando o ambiente é o espaço hiperbólico.

Primeiramente vamos fazer uma incursão pelas superfícies de $\mathbb{R}^3$, tomando *parâmetros isotérmicos*, obtendo com esta ajuda alguns conceitos, fórmulas e resultados fundamentais da geometria das imersões .

1) Considere S uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Considere $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas locais em uma vizinhança de um ponto $p \in S$; isto é, $E = G$ e $F = 0$, onde E, F, G, são os coeficientes da primeira forma fundamental, relativos a uma parametrização conforme $X(z)$. Vamos denotar também $E = \lambda^2$. Sejam l, m, n, os coeficientes da segunda forma fundamental (Na notação proposta em sala de aula $e = l, f = m, g = n$). Vamos denotar $\{X_1, X_2\}$ o referencial local adaptado à X em p. Usaremos também a notação X_u para designar X_1 e X_v para designar X_2.

   a) O gradiente, a divergência e o Laplaciano. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real suave definida em S. Define-se o *gradiente* de f, denotado por ∇f como sendo o campo de vetores tangentes à S satisfazendo

$$\nabla f \cdot v = df_p(v)$$

   onde v é tangente à S em p, isto é $v \in T_pS$.

i) Mostre que

$$\nabla f = \frac{f_u}{E} X_u + \frac{f_v}{E} X_v$$

onde cometemos o abuso de notação usual identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

b) Define-se a *divergência* de um campo Y de vetores tangentes à S (i. e $Y(p) \in T_pS$), denotada por div, como sendo o traço da aplicação $Z \to D_Z Y$, onde Z é um campo de vetores tangentes à S, e D é a conexão Riemanniana de S. Ou seja,

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(Z \to D_Z Y)$$

i) Mostre

$$\operatorname{div} Y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial u}(Y \cdot X_u) + \frac{\partial}{\partial v}(Y \cdot X_v)\right)$$

c) Define-se o *Laplaciano* de uma função real suave f definida em S , denotado por $\triangle f$, como sendo

$$\triangle f = \operatorname{div} \nabla f$$

i) Mostre

$$\triangle f(p) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}\right)$$

onde cometemos o abuso de notação identificando $f(u,v)$ com $f \circ X(u,v)$.

d) Mostre que os conceitos de gradiente, divergência e Laplaciano pertence à *geometria intrínseca das superfícies*, ou seja dependem apenas da primeira forma fundamental e podem por isto ser definidos numa superfície Riemanniana qualquer. Assim o Laplaciano definido acima é também chamado de *Laplaciano Riemanniano*.

e) Consideremos S munida de sua estrutura de superfície de Riemann (induzida pela métrica de S). Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função real suave. o *Laplaciano conforme relativo à coordenada conforme* z está definido como

$$\triangle_z f = f_{uu} + f_{vv}$$

i) Mostre que a definição de Laplaciano conforme depende da coordenada isotérmica z, uma função mas a noção de f ser harmônica na superfície de Riemann não depende. Além disso mostre que esta noção de harmonicidade é a mesma considerando o Laplaciano Riemanniano definido no item c).

Um importante teorema da Geometria é o *teorema da divergência*: Seja S uma superfície Riemanniana suave e seja Y um campo suave de vetores tangentes à S. O teorema da divergência (intrínseco) diz o seguinte

$$\int_S \operatorname{div} Y \,\mathrm{d}A = -\int_{\partial S} Y \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ é o elemento de área de S, ∂S é o bordo de S, $\mathrm{d}s$ é o elemento comprimento de arco de ∂S, e η é o vetor co-normal *interior* ao longo de ∂S (η é tangente à S, normal à ∂S, apontando para dentro de S).

i) Considere X como sendo o vetor posição de uma superfície orientada S em $\mathbb{R}^3$, por um campo de vetores normais unitários N ao longo de S. Suponha que ∂S seja uma curva (regular) simples fechada γ contida no plano-xy, de modo que $\gamma = \partial D$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de Jordan. Suponha que $S \cup D$ é um ciclo orientável, de modo que $S \cup D = \partial V$, onde V é um "sólido " de $\mathbb{R}^3$, e o teorema da divergência se aplica (Faça uma figura !). Seja $\triangle_{\mathbb{R}^3}$ o Laplaciano usual de $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$6\mathrm{vol}(V) + 2\int_S X \cdot N \,\mathrm{d}A = 0$$

Sugestão : Aplique corretamente o teorema da divergência (em $\mathbb{R}^3$)

ii) Mostre que

$$\triangle |X|^2 = 4 + 4HX \cdot N$$

iii) Aplique agora o teorema da divergência *em* S mostrando que

$$\int_S \triangle |X|^2 \,\mathrm{d}A = -2\int_{\partial S} X \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

onde η é o co-normal interior ao longo do bordo de S.

iv) Levando em conta os resultados obtidos nos itens ii) e iii) deduza que

$$4\,\text{área}(S) + 4H \int_S X \cdot N \, \mathrm{d}A = -2 \int_{\partial S} X \cdot \eta \, \mathrm{d}s$$

v) Juntando os resultados obtidos nos itens i) e iv) infira

$$2\,\text{área}(S) = 6H\text{vol}(M) - \int_{\partial S} X \cdot \eta \, \mathrm{d}s$$

f) (*Fluxo numa superfície mínima*). Suponha agora que S seja uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, orientada por um campo de vetores normal unitário N ao longo de S. Seja ν o co-normal *exterior* ao longo de ∂S.

i) Seja W um campo de vetores suaves em $\mathbb{R}^3$. Considere a componente tangencial W^T de W, ou seja a projeção ortogonal de W no plano tangente à S. Mostre que

$$W^T = W - (W \cdot N)\, N$$

ii) Seja v um campo *constante* em $\mathbb{R}^3$. Mostre que v^T é o gradiente de uma função harmônica que é a restrição à S de uma função linear em $\mathbb{R}^3$. *Sugestão* : Você vai precisar do fato que as coordenadas dos pontos de uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas: Veja logo adiante. Mostre ainda que segue do teorema da divergência a seguinte equação vetorial

$$\int_{\partial S} \nu \, \mathrm{d}s = 0$$

Conclua que para curvas fechadas γ, tem-se que $\int_\gamma \nu \, \mathrm{d}s$, é um invariante de homologia.

O fluxo ao longo de γ está definido pela quantidade

$$\text{Fluxo}([\gamma]) := \int_\gamma \nu \, \mathrm{d}s$$

Nota: Lembremos que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima S é sempre não positiva. A curvatura total denotada por $C(S)$ está definida por

$$C(S) := \int_S K \, \mathrm{d}A$$

Um resultado interessante é o seguinte: Se uma superfície mínima completa mergulhada de curvatura total finita em $\mathbb{R}^3$, tem *fluxo vertical* (i. e o fluxo, Fluxo($[\gamma]$), é um vetor vertical para toda curva fechada $\gamma \subset S$), então S é o plano o catenóide. Veja ref. 7. Nota: A curvatura total pode ser interpretada como a imagem esférica da aplicação normal de Gauss. De modo que quando a curvatura total é finita vale a seguinte fórmula:

$$C(S) = -4\pi n$$

onde n é o grau da aplicação normal de Gauss. Quando a curvatura total é finita segue de um teorema de Huber que S é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{S}$ de gênero g, removido um conjunto finito de pontos, chamados *puncture*. Os dados meromorfos $(g, f\,\mathrm{d}z)$ se estendem meromorficamente à $\overline{S}$ (*Teorema de Osserman*).

g) Mostre que *em parâmetros isotérmicas* $z = u + iv$, tem-se que:

   i) A curvatura média H e a curvatura de Gauss K de uma superfície S imersa em $\mathbb{R}^3$ são dados por

$$H = \frac{l+n}{2E} \qquad \text{e} \quad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{ln} - \mathrm{m}^2}{\mathrm{E}^2}$$

   Idem para uma superfície S imersa em $\mathbb{H}^3$.

   ii) Deduza que equação das linhas de curvatura *via o método dos multiplicadores de Lagrange*, e infira que em coordenadas isotérmicas a equação das linhas de curvatura é dada por

$$-m\,\mathrm{d}u^2 + (l-n)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + m\,\mathrm{d}v^2 = 0$$

h) Mostre as equações de Codazzi-Mainardi:

$$l_v - m_u = \frac{E_v}{2E}(l+n)$$
$$m_v - n_u = -\frac{E_u}{2E}(l+n)$$

Conclua

i) As equações de Codazzi-Mainardi podem ser escritas como

$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_u + m_v = EH_u$$
$$\left(\frac{l-n}{2}\right)_v - m_u = -EH_v$$

Sugestão : Parta dos termos a esquerda das equações propostas substituindo os termos pelas definições , em seguide use o fato de que N é normal unitário, X_u e X_v tangentes ortogonais e de mesmo módulo, aplicando simetria e compatibilidade com a métrica, para chegar ao resultado desejado.

Deduza

ii) Se $\varphi = \dfrac{l-n}{2} - im$, as equações de Codazzi tomam a *forma complexa*

$$\varphi_{\overline{z}} = EH_z$$

A equação (ou as equações) de Codazzi-Mainardi são *as mesmas* no espaço hiperbólico. Verifique isto ! onde $2\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial u} - i\dfrac{\partial}{\partial v}$, e $2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial}{\partial u} + i\dfrac{\partial}{\partial v}$. Infira que S tem curvatura média contante, sse φ é holomorfa. Mostre que isto implica que os pontos umbílicos de uma superfície conexa S imersa em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média contante são isolados ou S é totalmente umbílica. Mostre o mesmo para uma superfície de curvatura média constante imersa em $\mathbb{H}^3$.

iii) Mostre ainda que as linhas de curvatura são dadas pela equação

$$\operatorname{Im}\left(\varphi \cdot (\mathrm{d}z)^2\right) = 0$$

Nota: Um fato que pode ser demonstrado é que quando S (conexa) tem curvatura média constante, o índice do campo de linhas de curvatura num ponto singular (i. e num ponto umbílico, necessariamente isolado, se S não é totalmente umbílica) é estritamente negativo. Segue disto, e do teorema de Poincaré-Hopf, o seguinte teorema de Hopf demonstrado nos meados do século vinte. Tal resultado deu um novo impulso à teoria das superfícies de curvatura média constante:

Se uma superfície fechada imersa S em $\mathbb{R}^3$ (não necessariamente mergulhada), topologicamente equivalente a esfera , tem curvatura média constante então S é uma esfera geométrica. Enuncie e demonstre o correspondente teorema de Hopf no espaço hiperbólico.

iv) Mostre que quando S tem curvatura média constante a diferencial holomorfa quadrática

$$\varphi \cdot (\mathrm{d}z)^2$$

está globalmente bem definida em S, i. e não depende das escolhas dos parâmetros isotérmicos.

i) Mostre a seguinte fórmula

$$\triangle X = 2\,\overrightarrow{H}$$

onde $\overrightarrow{H}$ ó vetor curvatura média de S (Note que você pode interpretar X como sendo o vetor posição de S).

Conclua a seguinte caracterização das superfícies mínimas:

$$S \quad \text{é mínima} \qquad \Longleftrightarrow \triangle X = 0$$

Ou seja S é mínima, sse as coordenadas de S em $\mathbb{R}^3$ em parâmetros isotérmicos são funções harmônicas.

j) A idéia agora é enfocar o seguinte: Sejam k_1, τ_1, k_2, τ_2 as curvaturas e torções de duas linhas de curvatura passando por um ponto não umbílico de uma imersão mínima conforme $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, ($U$ aberto de $\mathbb{R}^2$). Então demonstre o *teorema de Enneper* deduzindo a seguinte fórmula

$$k_1^2\tau_1 = k_2^2\tau_2$$

Sugestão : Considere os parâmetros isotérmicos $z = u+iv$, i. e $X = X(z)$. Admita o fato que estes parâmetros podem ser escolhidos (nas vizinhanças de um ponto não umbílico) de forma que as linhas coordenadas sejam linhas de curvatura. Mostre que isto implica que $m = 0$ e que as equações de Codazzi-Mainardi ficam ($F = m = 0$)

$$l_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\right)$$

$$n_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G}\right)$$

Donde conclua que $l = -n = b,\ b \in \mathbb{R}$ (constante). Em seguida use as fórmulas da curvatura e da torção

$$\tau_1 k_1^2 = -\frac{X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu}}{|X_u \times X_{uu}|^2} \cdot \frac{|X_u \times X_{uu}|^2}{|X_u|^6}$$

Para concluir que $X_u \times X_{uu} \cdot X_{uuu} = \dfrac{l}{4}\left(2E_{uv} - \dfrac{E_u E_v}{E}\right)$. Daí segue o resultado desejado.

$i)$ Deduza do teorema de Enneper acima a seguinte proposição : Se uma família de linhas de curvatura de uma superfície mínima é constituída por curvas planas, assim também o é a família de linhas de curvatura ortogonal, numa vizinhança de um ponto não umbílico. Nota: As superfícies mínimas (não planas) cujas linhas de curvatura são curvas planas foram classificadas : Estas são o catenóide, a superfície mínima de Enneper e as superfícies de Bonnet.

Vamos em seguida abordar a famosa *representação de Weierstrass* das superfícies mínimas.

2) Seja S uma superfície mínima simplesmente conexa em $\mathbb{R}^3$ e $z = u + iv$ parâmetros isotérmicos. Vamos obter "meromorphic data" $(g, f\,\mathrm{d}z)$ que determinam a imersão mínima $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Seja

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) := X_u - iX_v$$

a) Mostre que $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos, sse $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$.

b) Mostre que X é harmônica, sse Φ é holomorfa.

c) Mostre que X é regular e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos (ou seja $E \neq 0$), sse $\sum |\Phi_j|^2 \neq 0$ e $z = u + iv$ são parâmetros isotérmicos.

d) Mostre que

$$X(z) = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \Phi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

e) Mostre que se X não é *plana* então $\Phi_1 \not\equiv i\Phi_2$, e $\Phi_3 \not\equiv 0$. Neste caso, existe uma função holomorfa $2f := \Phi_1 - i\Phi_2$ em U e uma função meromorfa

$g := \dfrac{\Phi_3}{\Phi_1 - i\Phi_2}$, de maneira que podemos escrever (fazendo um abuso de notação) a *representação de Weierstrass*

$$X(z) = \mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} \left((1-g^2)f\,dz, i(1+g^2)f\,dz, 2gf\,dz\right)$$

Mostre que a superfície será regular sse f se anula *apenas* nos pólos de g e a ordem de cada zero nestes pontos é exatamente o dobro da ordem do pólo de g.

i) Mostre que a métrica é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \left(|f|(1+|g|^2)\right)^2 |\,\mathrm{d}z|^2$$

ii) Mostre que a segunda forma fundamental II é dada por

$$II = -2\mathrm{Re}\,(f\,dz\,dg)$$

f) A finalidade deste exercício é mostrar que g é exatamente a composta da aplicação normal de Gauss com a projeção estereográfica do *pólo norte*, que tem que ser conforme, sse S é mínima (por quê ?).

i) Mostre que

$$X_u \times X_v = \left(\mathrm{Im}(\overline{\Phi_3}\Phi_2), \mathrm{Im}(\overline{\Phi_1}\Phi_3), \mathrm{Im}(\overline{\Phi_2}\Phi_1)\right)$$

Conclua

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\mathrm{Re}\,g}{1+|g|^2}, \frac{2\,\mathrm{Im}\,g}{1+|g|^2}, \frac{1-|g|^2}{1+|g|^2}\right)$$

Infira daí o desejado.

g) Mostre que a curvatura de Gauss K de uma superfície mínima pode ser expressa em termos de f, g

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$$

h) Vamos neste item re-obter superfícies mínimas clássicas via a representação de Weierstrass

i) Mostre que o catenóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = z, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$.

ii) Mostre que o helicóide pode ser obtido fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = \mathrm{e}^z$, $f(z)\,\mathrm{d}z = i\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z$.

iii) Mostre que Enneper pode ser obtida fazendo $U = \mathbb{C}, g(z) = z$, $f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z$. Nota: O catenóide é a única superfície mínima de revolução . O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies mínimas completas de curvatura total -4π. Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e gênero zero, então S tem que ser o plano ou o catenóide (*Teorema de Lopez-Ros*). Se uma superfície mínima S mergulhada e completa tem curvatura total finita e dois fins, então S tem que ser o catenóide (*Teorema de R. Schoen*): A hipótese de curvatura total finita pode ser relaxada e substituída pela hipótese bem mais fraca de *topologia finita* (*Teorema de P. Collin*).

iv) Obtenha a representação de Weierstrass da família catenóide-helicóide de superfícies mínimas associadas, localmente isométricas, ao catenóide (helicóide).

i) Vamos ver outros exemplos de superfícies mínimas

i_1) A superfície de Scherk é dada implicitamente por

$$\mathrm{e}^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

Estude o seu gráfico. Nota: Scherk foi obtida pelo método de separação das variáveis.

i_2) Considere $U = \mathbb{C}\setminus\{0\}, g(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}, f(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}$. Calcule Φ_1, Φ_2, Φ_3. Mostre que a condição de zeros e pólos de f, g estão satisfeitas. Para que a imersão esteja bem definida é necessário verificar as *condições de período*: Basta considerar uma curva de Jordan em torno de 0 e calcular os resíduos de Φ_1, Φ_2, Φ_3 na singularidade 0, e mostrar que parte real do resíduo é real. Conclua que $(g, f\,\mathrm{d}z)$ define uma imersão conforme mínima de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que a imersão é completa e de curvatura total $-\infty$. *Sugestão* : Para mostrar o último ponto você terá que usar o grande teorema de Picard.

i_3) Encontre você mesmo, via Weierstrass, várias superfícies mínimas completas em $\mathbb{R}^3$.

3) Vamos fazer agora algumas perguntas sobre superfícies de curvatura média constante de $\mathbb{R}^3$.
   a) Mostre que uma superfície de curvatura média constante (não nula) de $\mathbb{R}^3$ é sempre orientável.
   b) É sabido que uma gráfico com bordo planar de curvatura média constante H tem altura máxima $1/|H|$, estimativa esta realizada pelo hemisfério de raio $R = 1/|H|$. Mostre que se S é uma superfície conexa mergulhada com $H =$ constante, de modo que $S \cap \{z = 0\} = \partial S$ (S está de uma do plano-xy) então a distância máxima de S ao plano-xy é $2/|H|$. Sugestão : Aplique o princípio do máximo e o princípio de reflexão de Alexandrov de forma conveniente.
   c) Mostre que se S é uma superfície de curvatura média constante (não nula), com bordo uma curva γ plana simples fechada, então a configuração $S \cap \mathrm{Int}(\gamma) \neq \emptyset$ e $S \cap \mathrm{Ext}(\gamma) = \emptyset$ é impossível. *Sugestão* : Aplique a *fórmula do fluxo* dada em sala de aula, convenientemente.
   d) Mostre que se uma superfície com $H = \mathrm{cst} \neq 0$ propriamente mergulhada e completa em $\mathbb{R}^3$ tem dois fins tipo anel convergindo para dois cilindros então os cilindros têm que ser paralelos.
4) Exercícios de revisão e outros do livro do professor Manfredo (ref. 4).
   a) Faça os seguintes exercs da seção 3-2: Exercs 5, 6, 8, 14.
   b) Faça os seguintes exercs da seção 3-3: Exercs 5, 12, 14, 16, 24.
   c) Faça os seguintes exercs da seção 3-5: Exercs 9, 11.
   d) Faça os seguintes exercs da seção 4-3: Exercs 1, 2, 3, 4, 8, 9 .

Verifique com cuidados as propriedades geométricas estudadas nesta lista que são válidas para superfícies do espaço hiperbólico.

BIBLIOGRAFIA

1. João Lucas Marques Barbosa e Ricardo Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with convex planar boundary, II.* Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grénoble, **16**, 43-79, 1998.

2. João Lucas Barbosa e A. Gervásio Colares. *Minimal surfaces in R^3*. Monografias de matemática **40**, IMPA.

3. F. Braga Brito, W. Meeks III, H. Rosenberg e R. Sa Earp. *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve.* Indiana Univ. Math. J. **40**, 333-343, 1991.

4. Manfredo do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

5. Celso Costa. *Funções algébricas e superfícies mínimas.* Notas do 18° Colóquio brasileiro de matemática, IMPA.

6. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

7. David Hoffman. *Surfaces of constant curvature in manifold of constant curvature.* J. Diff. Geom. **8**, 161-176, 1973.

8. David Hoffmann e Herman Karcher. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature.* R. Ossermann (Ed.), Geometry V, Springer, 1997.

9. David Hoffman e William Meeks III. *Minimal surfaces based on the catenoid.* Am. Math. Mon. **97** (8), 702-730, 1990.

10. Heinz Hopf. *Differential Geometry in the large* . Lecture notes in mathematics, **1000**, Springer, 1989.

11. A. Huber. *On subharmonic functions and differential geometry in the large.* Comm. Math. Helv. **32**, 13-72, 1957.

12. K. Kenmotsu. *Lectures on deformable surfaces in R^3.* Preprint, 1995.

13. William Meeks III. *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature.* J. Diff. Geom. **16**, 161-177, 1981.

14. Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces.* Dover Public. Inc, N. Y, 1986.

15. Murray H. Protter e Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations.* Prentice-Hall, 1967.

16. H. Rosenberg e R. Sa Earp. *The geometry of properly embedded special surfaces in R^3; e. g, surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive.* Duke Math. J. **73** (2), 291-306, 1994.

17. Ricardo Sá Earp. *Uma fórmula do fluxo para superfícies compactas de curvatura média constante em R^3 com bordo planar.* Revista Unimar, **15** (3), 229-247, 1993.

18. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal.* Bol. Soc. Bras. Mat. **26** (2), 129-148, 1995.

19. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Classification des surfaces de type Delaunay.* Amer. J. Math. **121**, 671-700, 1999.

20. Ricardo Sá Earp e Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot, multimedia, 1997.

21. Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. *Symmetry of properly embedded special Weingarten surfaces in H^3.* Trans. Amer. Math. Soc. **351**, 4693-4711, 1999.

22. F. Pécastaings et J. Sevin. *Chemins vers la géométrie* . Mathématiques supérieures. Premier cycle universitaire. Vuibert, 1981.

23. Jorge Sotomaior e Carlos Gutierrez. *Structurally stable configurations of lines of curvature and umbilic points on surfaces.* Monografias del IMCA, 1998.

24. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* vol. 3, second edition. Publish or Perish, 1979.

25. J. J. Stoker. *Differential Geometry.* Academic Press, N. Y. , 1959.

26. Dirk Struik. *Lectures on classical differential geometry.* Addison-Wesley, 1950.

27. Paulo Ventura Araújo. *Geometria Diferential.* Coleção matemática universitária. CNpq-IMPA, 1998.

28. *Courbes Mathématiques.* Revue du Palais de la Découverte, No 45, 1995.