GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista5

Professor: Ricardo Sá Earp

1) Lembremos primeiramente da *transformação de Koebe* h. Seja f uma função holomorfa e univalente definida no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Seja $z_0 \in \mathcal{D}$, então h está definida por

$$h(z) := \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)\, f'(z_0)} = z + \left(\frac{1}{2}\,(1 - |z_0|^2)\,\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right) z^2 + \cdots$$

Note que f pertence a classe $\mathcal{S}$ (*schlicht functions*) consistindo das funções analíticas e univalentes em $\mathcal{D}$ da forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Lembremos ainda a conjectura de Bieberbach demonstrada por de Branges em 1985 que diz o seguinte

$$(B) \qquad |a_n| \leqslant n \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{S}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Daí e da transformação de Koebe segue imediatamente que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$ então

$$(*) \qquad \left|(1 - |z|^2)\,\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right| \leqslant 4, \qquad \text{para} \quad z \in \mathcal{D}$$

A classe Σ consiste das funções $g(z)$ definidas no disco perfurado $\mathcal{D}^*$ satisfazendo

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1 \zeta^{-1} + \cdots (|\zeta| > 1)$$

a) Mostre que a igualdade em (B) vale para a função de Koebe $f_0(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Estude a função de Koebe f_0 mostrando que a imagem por f_0 de $\mathcal{D}$ contém a bola aberta $\mathcal{B}$ de raio $1/4$ centrada na origem. Esta é uma propriedade satisfeita por todas as funções *schlicht*. No caso da função de Koebe $f_0(z)$ tal bola $\mathcal{B}$ é extremal ?

b) Mostre que se $f \in \mathcal{S}$ então $g(\zeta) := 1/f(\zeta^{-1})$satisfaz

$$g(\zeta) = \zeta - a_2 + (a_2^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots (|\zeta| > 1)$$

concluindo que g pertence a Σ e que omite 0. Reciprocamente, mostre que se $g \in \Sigma$ e $g(\zeta) \neq 0$ para $\zeta \in \mathcal{D}^*$, então

$$f(z) = 1/g(z^{-1}) = z - b_0 z^2 + \left(b_0^2 - b_1\right) z^3 + \cdots (|z| < 1)$$

pertence à $\mathcal{S}$.

c) Mostre o *teorema da área*

$$\operatorname{area}(\mathbb{C} \setminus g(\mathcal{D}^*)) = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right) \qquad \text{para } \ g \in \Sigma$$

inferindo

$$|b_1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1 \qquad \text{para } \ g \in \Sigma$$

Nota : Segue do teorema da área o caso particular do teorema de de Branges $|a_2| \leqslant 2$.

d) Mostre que se f é uma função schlicht então $|a_2^2 - a_3| \leqslant 1$. Deduza daí que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$, então a derivada Schwarziana S_f de f satisfaz

$$|S_f(z)| \leqslant 6\left(1 - |z|^2\right)^{-2}$$

onde $S_f(z) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$

2) Considere o *teorema de distorção de Koebe*: Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ uma aplicação conforme que leva $\mathcal{D}$ no plano complexo $\mathbb{C}$. Para $z \in \mathcal{D}$ valem as seguinte desigualdades

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z) - f(0)| \leqslant |f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{2}$$

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant |f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{3}$$

que pode ser demonstrado integrando-se a equação $(*)$ duas vezes. Vamos definir agora $d_f(z) = \text{dist}(f(z), \partial f(\mathcal{D}))$, (distância Euclideana de $f(z)$ ao bordo de $f(\mathcal{D})$. Claro que $d_f(z_0) = \liminf\limits_{|\zeta|\to 1} |f(\zeta) - f(z_0)|$.

a) Seja novamente h a transformação de Koebe. Usando (2) e o princípio do mínimo mostre que

$$\frac{1}{4} \leqslant \liminf_{|z|\to 1} \left|\frac{h(z)}{z}\right| \leqslant |h'(0)| = 1$$

Conclua

b) Se f leva $\mathcal{D}$ conformente em $\mathbb{C}$ então

$$\frac{1}{4}\left(1 - |z|^2\right)|f'(z)| \leqslant d_f(z) \leqslant (1 - |z|^2)|f'(z)| \qquad \text{para} \;\; z \in \mathcal{D}$$

Tire as seguintes consequências: Primeiramente, mostre que se f leva $\mathcal{D}$ conformemente sobre um domínio limitado, então $(1 - |z|)|f'(z)| \to 0$ (quando $|z| \to 1$). Segundo, mostre que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, com f satisfazendo $f(0) = 0$, então

$$|f(z)| \leqslant \frac{4|cz|}{(1 - |z|)^2} \qquad z \in \mathcal{D}$$

Em seguida, vamos ver uma formulação invariante que segue do teorema de distorção de Koebe em termos da distância hiperbólica ρ, munindo $\mathcal{D}$ da métrica hiperbólica $\mathrm{d}s = \dfrac{2}{(1 - |z|^2)}|\,\mathrm{d}z|$.

3) Mostre que se f é uma aplicação conforme que leva $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$, e se $z_0, z_1 \in \mathcal{D}$, então

$$\text{(4)} \qquad \frac{\tanh \frac{1}{2}\rho(z_0, z_1)}{4} \leqslant \frac{|f(z_1) - f(z_0)|}{(1 - |z_0|^2)\,|f'(z_0)|} \leqslant \exp\left(2\rho(z_0, z_1)\right)$$

$$\text{(5)} \qquad |f'(z_0)| \exp\left(-3\rho(z_0, z_1)\right) \leqslant |f'(z_1)| \leqslant |f'(z_0)| \exp\left(3\rho(z_0, z_1)\right)$$

Sugestão : Pra obter (5), use a transformação de Koebe com $z = (z_1 - z_0)/(1 - \overline{z_0} z_1)$, use a equação (2), e a fórmula da distância hiperbólica. Para obter a outra desigualdade use (3) e um argumento por simetria.

Este resultado tem uma forma geométrica útil nas aplicações

4) Sejam a, b, c contantes positivas e seja $0 < |z_0| = 1 - \delta < 1$. Se

$$0 \leqslant 1 - b\delta \leqslant |z| \leqslant 1 - a\delta, \qquad |\arg z - \arg z_0| \leqslant c\delta$$

e se f leva $\mathcal{D}$ conformemente em $\mathbb{C}$, então existem constantes M_1 e M_2 dependendo apenas de a, b, c tal que

$$\begin{gathered} |f(z) - f(z_0)| \leqslant M_1 \delta |f'(z_0)| \\ M_2^{-1} |f'(z_0)| \leqslant |f'(z)| \leqslant M_2 |f'(z_0)| \end{gathered}$$

Sugestão : A demonstração destas estimativas usa geometria (trigonometria) hiperbólica básica para estimar $\rho(z, z_0)$ em termos das constantes a, b, c (faz-se necessário desenho !!) combinada com os resultados obtidos no item anterior.

5) (*Woff's lemma*) Seja h uma aplicação que envia o aberto $H \subset \mathbb{C}$ conformemente dentro de $\mathcal{D}_R := \{|z| < R\}$. Seja $C(r) := H \cap \{|z - c| = r\}$ para $c \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\inf_{\lambda < r < \sqrt{\lambda}} \operatorname{compr}(h(C(r)) \leqslant \frac{2\pi R}{\sqrt{\log 1/\lambda}}, \qquad \text{para } \ 0 < \lambda < 1$$

Consequentemente, mostre que existe uma seqüência decrescente $\{r_n\}$, $r_n \to 0$ (quando) $n \to \infty$) satisfazendo

$$\operatorname{compr}(h(C(r_n))) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Sugestão : Denote $l(r) := \operatorname{compr}(h(C(r_n)))$. Use a desigualdade de Schwarz para obter

$$l(r)^2 \leqslant 2\pi r \int_{c + r\,\mathrm{e}^{it} \in H} |h'(c + r\,\mathrm{e}^{it})|^2 r \,\mathrm{d}t$$

Em seguida, divida ambos os lados por r e integre em r, com r variando de 0 à ∞, concluindo

$$\int_0^\infty l(r)^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} \leqslant 2\pi \operatorname{area} h(H)$$

Mostre usando o mesmo método que *se f envia conformemente $\mathcal{D}$ sobre um conjunto limitado, então quase todo raio $[0, \zeta)$, $\zeta \in \partial\mathcal{D}$, é enviado sobre curvas de comprimento limitado.*

6*) (*desigualdade isoperimétrica*) Seja $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ um domínio simplesmente conexo de área A, cujo bordo é uma curva simples fechada em $\mathbb{H}^2$ de comprimento L. Mostre que

$$L^2 \geqslant 4\pi A + A^2$$

sendo que a igualdade é válida se, e somente se Ω é um disco geodésico, e assim, seu bordo é um círculo contido em $\mathbb{H}^2$ (verifique primeiramente isto !!). Como referência, veja o artigo de Osserman *The isoperimetric inequality*, publicado no Bull. AMS , vol. 84(6), 1978.

7) Neste exercício você precisa ter o conhecimento básico de espaços de recobrimento e de superfícies de Riemann.

a) Mostre o seguinte: Seja M uma superfície de Riemann conexa e seja $\Pi : \widetilde{M} \to M$ um recobrimento simplesmente conexo de M. Nestas condições existe uma única estrutura conforme sobre $\widetilde{M}$ de maneira que a projeção Π seja uma aplicação conforme de $\widetilde{M}$ sobre M. Além disto, se $\Pi_1 : \widetilde{M_1} \to M$ e $\Pi_2 : \widetilde{M_2} \to M$ são dois recobrimentos conformes e simplesmente conexos de M, as superfícies de Riemann simplesmente conexas $\widetilde{M_1}$ e $\widetilde{M_2}$ são conformementes equivalentes.

Nota: O teorema de uniformização de Riemann diz que toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente ou bem à $\mathbb{S}^2$, ou bem à $\mathbb{C}$, ou bem à $\mathcal{D}$.

Antes do próximo exercício precisamos lembrar a definição da noção de um grupo agir *própria e descontinuamente*. Seja X um espaço topológico e Λ um grupo de homeomorfismo de X. Seja $p \in X$. A órbita de p, denotada Λ_p, é o conjunto das imagens de p pelos elementos de Λ, i. e $\Lambda_p := \{f(p); f \in \Lambda\}$. Dizemos que Λ age própria e descontinuamante se as duas condições seguintes são satisfeitas:

(1) Para todo $x, y \in X$, com $y \notin \Lambda_x$, existe um aberto U de X contendo x e um aberto V de X contendo y disjunto de U tal que $f(U) \cap V = \emptyset$, para todo $f \in \Lambda$. (o quê significa esta condição ?).

(2) Para todo $x \in X$ existe um aberto U de X contendo x tal que $f(U) \cap U = \emptyset$, para todo $f \in \Lambda$, f diferente da identidade.

b) Seja $\Pi : \widetilde{M} \to M$ um recobrimento conforme e simplesmente conexo. Mostre que nestas condições o grupo de recobrimento Λ é um subgrupo do grupo de transformações de Möbius de $\widetilde{M}$ que age própria e descontinuamente sobre $\widetilde{M}$.

c) Seja $\Pi : \widetilde{M} \to M$ um recobrimento conforme e simplesmente conexo. Seja Λ o grupo de recobrimento e considere o quociente $\widetilde{M}/\Lambda$ munido da única estrutura conforme que faz a profeção canônica $P : \widetilde{M} \to M$ conforme. Mostre que nestas condições as superfícies de Riemann M e $\widetilde{M}/\Lambda$ são conformemente equivalentes. Conclua do que você estudou neste item que toda superfície de Riemann M, diferente da esfera, do plano complexo, do plano complexo perfurado e dos toros, admite uma única métrica (hiperbólica) completa de curvatura de Gauss identicamente igual a -1.

d) Sejam M e N duas superfícies de Riemann munidas da métrica hiperbólica obtida no item anterior (ou seja, o recobrimento conforme de ambas superfícies é o disco $\mathcal{D}$). Assuma primeiro que ambas M e N sejam simplesmente conexas. Mostre que se $f : M \to N$ é uma aplicação holomorfa da superfície de Riemann M na superfície de Riemann N que não é uma equivalência conforme então f encolhe estritamente o comprimento das curvas. No caso geral demonstre o seguinte: Ou bem, $f : M \to N$ é uma isometria local na métrica hiperbólica e uma aplicação de recobrimento, ou bem $f : M \to N$ encolhe estritamente o comprimento das curvas.

e*) Estude a noção de grupo modular, função modular, domínio fundamental e exiba um exemplo não trivial destas noções estudando os detalhes. Confira no livro de Rudin *Real and Complex Analysis* e veja também as refs 7 e 12.

8) Reproduza com todos os detalhes a classificação das curvas com curvatura constante no plano hiperbólico.

9) Reproduza com todos os detalhes, apresentando aplicações, o princípio do máximo para curvas em $\mathbb{H}^2$.

10) Considere a curva $\gamma(y) = (u(y), y)$, onde u é uma função de classe C^2 definida no intervalo $[a, b]$, $0 < a \leqslant y \leqslant b$, satisfazendo $u(a) = u(b) = 0$. Suponha que a curvatura geométrica de γ seja menor ou igual a 1. Mostre que existem constantes c_1, c_2, c_3 não dependendo de γ tal que

$$
\begin{aligned}
&|u(t)| \leqslant c_1 \qquad \forall t \in [a, b] \\
&|u'(a)| \leqslant c_2 \qquad |u'(b)| \leqslant c_3
\end{aligned}
$$

11) Considere $\gamma = (x, y) : [0,1] \to \mathbb{H}^2$, uma curva compacta de classe C^2 até o bordo, com $y(0) = y(1) = 1$, $x(0) \neq x(1)$. Suponha que a curvatura geométrica k de γ satisfaz $k \leqslant a < 1$. Suponha que o vetor curvatura $\overrightarrow{k}$ satisfaz $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} > 0$, onde $\overrightarrow{j} = (0,1)$. Mostre que existem duas curvas C_1 e C_2 de curvaturas geometricas a e 1, respectivamente, ambas passando por $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, tal que γ fica situada na região limitada de $\mathbb{H}^2$ delimitada por C_1 e C_2.

12) Fazer os seguintes exercícios da §6 da ref. 12 : Exercs (6), (7), (8), (9), (11).

BIBLIOGRAFIA

1. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory.* McGraw-Hill, 1973.

2. João L. Barbosa, Ricardo Sá Earp. *Geometric methods and nonlinear analysis.* X Escola de Geometria Diferencial, UFMG, 20 à 24 de julho de 1998.

3. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.

4. Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, 1993.

5. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1998.

6. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Preprint, 2000 (a ser publicado na Revista Matemática Universitária).

7. Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces* . Springer, 1980.

8. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

9. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.

10. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, **1000**. Springer, 1989.

11. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

12. John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer, 1994.

13. Ricardo Sá Earp et Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot multimedia, 1997.

14. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* , second edition. Publish or Perish, 1979.

15. William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.* Edited by Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.