GEOMETRIA HIPERBÓLICA -2000.2–Lista3

Professor: Ricardo Sá Earp

1) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$ em $\mathbb{R}^3$.
   a) Mostre que a *projeção estereográfica usual do pólo norte* é dada por
   $$\Pi_N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} := E$$
   b) Mostre que a inversa é dada por
   $$z \longmapsto \left(\frac{2\mathrm{Re}\,\mathrm{E}}{\mathrm{E}\overline{\mathrm{E}} + 1}, \frac{2\,\mathrm{Im}\,E}{E\overline{E} + 1}, \frac{E\overline{E} - 1}{E\overline{E} + 1}\right)$$
   c) Mostre que a métrica Euclideana $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2$ em $\mathbb{R}^3$ induzida em $\mathbb{S}^2$, induz em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a seguinte métrica
   $$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{(1 + E\overline{E})^2}(\mathrm{d}(\mathrm{Re}\,\mathrm{E})^2 + \mathrm{d}(\mathrm{Im}\,\mathrm{E})^2)\cdot$$
   d) Mostre que a curvatura de Gauss da referida métrica é $K \equiv +1$.
   e) Mostre que uma isometria positiva da referida métrica é o conjunto das transformações de Möbius da forma
   $$T(z) = \frac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}$$
   satisfazendo $|a|^2 + |c|^2 = 1,\ a, c \in \mathbb{C}$.
   f) Mostre que para cada tal isometria positiva T correspondem z e $\dfrac{-1}{\overline{z}}$ fixados por T. Note que T é "elíptica", você sabe justificar esta terminologia ?
   g) A aplicação $z \mapsto 1/z$ é uma isometria positiva ? Descreva-a geometricamente.

2) Mostre que podemos obter uma pavimentação do *Disco de Poincaré* ("tiling") por octógonos regulares (hiperbólicos) idênticos, cada qual com ângulo interno $\pi/4$, e cada qual podendo ser levado em outro por uma isometria positiva. Obtenha assim uma superfície de Riemann de gênero g que admite uma

métrica hiperbólica de curvatura -1. Isto pode ser feito para $g > 2$? E para $g = 1$?

3) Seja $R(z)$ uma fração racional, isto é um quociente de polinômios (função meromorfa na esfera de Riemann). Diz-se que ponto ξ é um ponto fixo de $R(z)$, se $R(\xi) = \xi$. Dizemos que um ponto fixo $\xi \in \mathbb{C}$ é um *atrator*, se $|R'(\xi)| < 1$, é um repulsor se $|R'(\xi)| > 1$, é indiferente se $|R'(\xi)| = 1$. Considere $z_0,\ z_1 = R(z_0),\ z_2 = R(z_1), \ldots z_{n+1} = R(z_n)$.
   a) Mostre que se a seqüência $\{z_n\}$ converge à ζ, i. e $z_n \to \zeta$ $(n \to \infty)$, então ζ é um ponto fixo de $R(z)$.
   b) Mostre que os pontos fixos de $R(z) = z^2 - 4z + 6$ são $2, 3$ e ∞. Encontre os pontos z_0 tais que $z_n \to 2$.
   c) Mostre que se z_0 está suficientemente próximo de um ponto fixo atrator ξ, então $z_n \to \xi$ $(n \to \infty)$.
   d) Discuta o ponto fixo de uma transformação parabólica do plano hiperbólico. É atrator ?
   e) Discuta o caso de uma transformação hiperbólica. Existe sempre um ponto fixo atrator ?
   f) Considere a aplicação $T(z) = \dfrac{2z}{z+1}$. Mostre que 0 e 1 são os pontos fixos de $T(z)$. Calcule $T'(0)$ e $T'(1)$. Mostre que para todo n

$$T^n(z) = \frac{2^n z}{(2^n - 1)z + 1}$$

   Calcule ainda $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(z)$, para cada z, incluindo $0,\ 1,\ \infty$. Além disso, calcule $\lim\limits_{n\to\infty} (T^{-1})^n(z)$.

4*) Pesquise sobre conjuntos de Julia, de Fatou e de Mandelbrot, exibindo exemplos.

5) Considere os subconjuntos do plano hiperbólico $\mathcal{C}_1 := \{z = x + iy,\ y > 0;\ x^2 + y^2 = 1\}$, e $\mathcal{C}_2 := \{z = x + iy,\ y > 0;\ x^2 + y^2 = 4\}$. Calcule a distância hiperbólica entre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

6) Dados dois pontos (distintos) p e q de $\mathbb{H}^2$ quantos horociclos passam por p e q ? E quantas curvas equidistantes à distância ρ da geodésica única que passa por p e q ?

7) Demonstre com todos os detalhes o teorema de Schwarz-Pick.

8) Demonstre a lei dos senos (relativa a um triângulo geodésico de lados com comprimentos hiperbólicos a, b e c, e ângulos opostos α, β e γ, respectivamente)

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

9) Idem para a lei do cosseno I

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma$$

10) Idem para a lei do cosseno II

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

11) Descreva geometricamente de maneira a mais simples possível uma dada isometria positiva geral do plano hiperbólico.

12) Fazer os seguintes exercícios da §5 da ref. 9 : Exercs (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (7).

BIBLIOGRAFIA

1. João L. Barbosa, Ricardo Sá Earp. *Geometric methods and nonlinear analysis.* X Escola de Geometria Diferencial, UFMG, 20 à 24 de julho de 1998.
2. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.
3. Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics.* Springer, 1993.
4. Manfredo P. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 1998.
5. Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces* . Springer, 1980.
6. Noel J. Hicks. *Notes on differential geometry* . Van Nostrand, 1965.
7. Heinz Hopf. *Differential geometry in the large.* Lecture Notes in Mathematics, **1000**. Springer, 1989.
8. John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds.* Springer, 1994.

9. Ricardo Sá Earp et Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Diderot multimedia, 1997.

10. Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry* , second edition. Publish or Perish, 1979.

11. William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.* Edited by Silvio Levy, Princeton University Press, 1997.