GEOMETRIA HIPERBÓLICA-2000.2–Lista11

Professor: Ricardo Sá Earp

Nesta lista completaremos nosso estudo introdutório de geometria hiperbólica, durante parte do qual fizemos também um estudo introdutório de geometria Riemanniana. Assim serão colocadas questões de geometria hiperbólica e geometria Riemanniana, posto que as ferramentas da geometria Riemanniana são absolutamente necessárias para o entendimento da geometria hiperbólica, particularmente da teoria das superfícies (hipersuperfícies) do espaço hiperbólico. Certos conceitos e resultados vistos, ou abordados de alguma forma, em dimensão 3 serão examinados em dimensões arbitrárias já que a extensão é um processo intelectual trivial.

1) Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+k$. Suponha que M tem a métrica riemanniana induzida por f. Seja $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ seja uma subvariedade de $\overline{M}$. Sejam X, Y campos de vetotes em $f(U)$ e estenda-os a campos de vetores $\overline{X}, \overline{Y}$ em um aberto de $\overline{M}$. Defina $(\nabla_X Y)(p) =$ componente tangencial de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}(p)$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\overline{M}$.
   a) Mostre que ∇ é a conexão riemanniana de M.
   b) Mostre que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e $n+1$ campos de vetores $e_1, \ldots, e_{n+1}$ ao longo de U, ortornormais em cada ponto de U, tais que em p, $\overline{\nabla}_{e_i} e_j(p) = 0$. Uma tal família $e_i, i = i, \ldots, n+1$ de campos de vetores é chamada um *referencial local geodésico* em p (Veja refs. 5 e 9)
   c) Calcule o gradiente de uma função real suave g em M, a divergência de um campo suave Y em M, e o Laplaciano de uma função real suave g em M, *num ponto* p, usando o referencial geodésico determinado no item b).

2) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ centrada na origem
   a) Exiba a conexão Riemanniana de $\mathbb{S}^n$. Dê um argumento intuitivo de que a curvatura seccional da esfera é 1.
   b) Mostre que os círculos máximos de raio 1 são as únicas geodésicas de $\mathbb{S}^n$.

c) Mostre, por um exemplo que o transporte paralelo, em geral, depende apenas da curva que liga estes dois pontos. *Sugestão*: Considere o cone C tangente a $\mathbb{S}^2$ ao longo de um paralelo qualquer c de $\mathbb{S}^2$. Mostre que o transporte paralelo de um vetor tangente V_0 a $\mathbb{S}^2$ em um ponto de c é o mesmo quer tomado em relação a $\mathbb{S}^2$ ou a C.

d) Mostre que todas as curvas de curvatura constante em $\mathbb{S}^2$ são círculos de $\mathbb{S}^2$. Mostre que a curvatura *em* $\mathbb{S}^2$ é dada por $r^2 = \dfrac{1}{k^2+1}$, onde r é o raio do círculo.

3) Consider o espaço de Lorentz $\mathcal{L}^{n+2} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ munido da métrica pseudo-riemanniana $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}x_0^2 + \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_{n+1}^2$.

a) Mostre que existe uma única conexão afim em $\mathcal{L}$ (i.e satisfazendo as propriedades de linearidade e produto) que é *compatível* com a métrica pseudo-riemanniana de $\mathcal{L}$ e que é *simétrica*. Calcule os *símbolos de Christoffel* desta métrica pseudo-riemanniana.

b) Considere o modelo de Minkowski $\mathcal{H}^3$ do espaço hiperbólico definido por $\mathcal{H}^3 := \{(t,x,y,z),\ -t^2+x^2+y^2+z^2 = -1,\ t,x,y,z \in \mathbb{R}\}$ munido da métrica de Lorentz $\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$.

i) Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{H}$, dada por $f(x,y,z) = \left(\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}, x, y, z\right)$ determine uma orientação natural em $\mathcal{H}$ proveniente da orientação natural de $\mathbb{R}^3$. Seja M uma superfície de Riemann e sejam $z = u + iv$ coordenadas isotérmicas em M. Seja $X : M \to \mathcal{H}^3$ uma imersão conforme suave cujo vetor curvatura média está denotado por $\overrightarrow{H}$. Assuma $\overrightarrow{H} \neq 0$. Então podemos assumir que $\{X, X_u, X_v,\ \overrightarrow{H}\}$ em z é uma base positiva de $\mathcal{L}^4$, para cada $z \in M$. Logo, com nossa convenção sobre X, mostre que $\{X_u, X_v,\ \overrightarrow{H}\}$ é uma base positiva de $\mathcal{H}^3$.

c) Considere B^3 o modelo da bola do espaço hiperbólico. Mostre que a aplicação (*projeção estereográfica*) $F : \mathcal{H}^3 \to B^3$, dada por

$$F(t,x,y,z) = \left(\frac{x+iy}{1+t}, \frac{z}{1+t}\right)$$

é uma isometria global que preserva orientações . Interprete geometricamente esta aplicação . Calcule a inversa .

iii) Seja $O^+(1,3)$ o grupo de isometrias de $\mathcal{H}^3$. Considere o conjunto de matrizes

$$A(s) = \begin{bmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Mostre que $\{A(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ é um sub-grupo à um parâmetro de isometrias de $\mathcal{H}$; i. e $\{A(s)\} \subset O^+(1,3)$. Dê uma interpretação geométrica. Qual é o resultado da ação de um elemento qualquer $A(-s)$ no ponto $(\cosh s, \sinh s e_1)$, onde $e_1 = (0,1,0,0)$? Daí deduza a existência de um sub-grupo de isometrias que age transitivamente em $\mathcal{H}$ (Faça desenhos !!).

d) Seja $X \in \mathcal{H}^{n+1}$ e seja $v \in T_X \mathcal{H}^{n+1}$, onde $\mathcal{H}^{n+1}$ ó modelo de Minkowski do espaço hiperbólico. Mostre que a geodésica única que passa por X tangente ao vetor unitário v é dada por $\gamma(t) = \cosh t X + \sinh t v$. Interprete geometricamente as geodésicas neste modelo, mostrando que estas são as interseções de $\mathcal{H}^{n+1}$ com planos de $\mathbb{R}^{n+2}$ que passam pela origem dadas pela equação acima. Classifique as superfícies totalmente geodésicas, no caso $n+1 = 3$, mostrando que são interseções de $\mathcal{H}^3$ com sub-espaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^4$.

4) Suponha que um campo X em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ satisfaz $X(p) \neq 0$, $p \in \overline{M}$.

a) Estude o teorema do fluxo e do grupo local 1-parametro da teoria das EDO e mostre que existe um sistema de coordenadas $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ numa vizinhança U de p tal que $\dfrac{\partial}{\partial t} = X$.

b) Mostra que a forma volume ν se escreve numa vizinhança de p como $\nu = \sqrt{g}\, dt \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Determine $\sqrt{g}$.

c) Com as notações acima, levando em conta a expressão local obtida em sala de aula, conclua que $\operatorname{div} X = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial}{\partial t} \sqrt{g}$,

ou seja $\operatorname{div} X$ "mede intuitivamente o grau de variação do volume de $\overline{M}$ ao longo das trajetórias de X".

d) Mostre também que

$$d\left(\imath_X \nu\right) = \operatorname{div} X \nu,$$

onde $\imath$ é o produto interior de das *formas diferenciáveis* que leva uma $k+1$-forma numa k-forma (veja refs. 9, 25, 36).

e) Enuncie o teorema da divergência para variedades Riemannianas, numa situação bem geral e mostre a primeira identidade de Green (Veja na ref. 13).

5) Seja $\overline{M}$ uma variedade riemanniana e seja $\bar{\triangle} : \mathcal{D}(\bar{M}) \to \mathcal{D}(\bar{M})$ o operador Laplaciano.

a) Mostre que dada $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ suave, o valor de $\overline{\triangle}$ em f é dado por $\overline{\triangle} f =$ traço Hess f, onde Hess $f : T_p\overline{M} \to T_p\overline{M}$ é o operador definido por $(\text{Hess } f)(Y) = \overline{\nabla}_Y(\nabla f)$, $Y \in T_p\overline{M}$.

Além disto se $M = f^{-1}(a)$, onde a é um valor regular de f, mostre que

b) Hess f restrito a TM é auto-adjunto.

c) A curvatura média H de M, a menos de sinal, é dada por $nH = \text{div}\left(\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)$.

d) Se $g \in \mathcal{D}(\bar{M})$ mostre que $\triangle(fg) = f\triangle g + g\triangle f + 2 < \nabla f, \nabla g >$.

e) Se $\overline{M} = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}; |X| < 1\}$ é bola unitária munida da métrica (hiperbólica) $ds^2 = \dfrac{|dX|^2}{(1-|X|^2)^2}$, mostre que

$$\overline{\triangle} = (1-r^2)^2\left(\sum_{i=1}^{n+1} a\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b\frac{(n-1)}{1-r^2}\frac{r\partial}{\partial r}\right),$$

para constantes a, b; onde $r = |X|$. Calcule a e b.

f) Considere $\mathcal{H}^{n+1}$ o modelo de Minkowski do espaço hiperbólico (Veja item 3) acima). Seja p um inteiro positivo menor que $n+1$ Considere $\widetilde{f}$ definida em $\mathcal{L}$ por

$$\widetilde{f}(X) = -x_0^2 - \cdots - x_{p-1}^2 + x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2$$

Seja f a função suave definida em $\mathcal{H}$ por $f = \widetilde{f}\,\big|_{\mathcal{H}^{n+1}}$.

i) Mostre que $\|\nabla f\|^2 = -4 + 4f^2$. *Sugestão* : Lembre-se que $X = (x_0, \ldots, x_n, x_{n+1})$ é normal à $\mathcal{H}^{n+1}$ em $\mathcal{L}$. Mostre que

$\nabla\widetilde{f} = \nabla f - 2fX$, e que $\nabla\widetilde{f}(X) = 2(-x_0, \ldots, -x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n, -x_{n+1})$. Este é um exemplo de *função transnormal* obtido por Marcos Alexandrino na sua dissertação de Mestrado (Veja ref. 1).

ii) Mostre que

$$\triangle f = (2n+4)f + 2(n-2p)$$

Isto, junto com o resultado do item i), implica que f é uma função isoparamétrica (Veja ref. 1).
Sugestão : Mostre que $\overline{\nabla}_Y \nabla \widetilde{f} = 2(-y_0, \ldots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n, -y_{n+1})$. Conclua que $\overline{\nabla}_X \nabla \widetilde{f} = \nabla \widetilde{f}$. Logo,infira que $< \overline{\nabla}_X \nabla \widetilde{f}, X >= 2f$. Deduza também que $\triangle \widetilde{f} = 2(n-2p)$. Em seguida, tome um referencial em $X \in \mathcal{H}^{n+1}$, $\{e_0, \ldots, e_n, X\}$, tal que $\{e_0, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortornormal de $\mathcal{H}^{n+1}$, para fazer os cálculos.

iii) Considere c um valor regular de f de maneira que $f^{-1}(c)$ é uma *folha regular*. Mostre que o espaço tangente $T_X f^{-1}(c)$, é gerado pelos subespaços ($v \in T_X f^{-1}(c)$)

$$W_1 := \{(0, \ldots, v_p, \ldots, v_n, 0); v_p x_p + \cdots + v_n x_n = 0\}$$

$$W_2 := \{(v_0, \ldots, v_{p-1}, 0, \cdots, 0, v_{n+1}); v_0 x_0 + \cdots + v_{p-1} x_{p-1} - v_{n+1} x_{n+1} = 0\}$$

iv) Mostre que, com a orientação determinada pelo gradiente de f, $f^{-1}(c)$ é um *cilindro* em $\mathcal{H}^{n+1}$ com curvaturas principais iguais a $-\dfrac{1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ (multiplicidade $n-p$) e $\dfrac{-1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ (multiplicidade p)
Sugestão : Use o fato que $N = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ é o campo normal unitário no sentido do gradiente e que $\|\nabla f\|$ é constante em $f^{-1}(c)$. Mostre que

$$\nabla_Y \nabla f = \overline{\nabla}_Y \nabla f + < \overline{\nabla}_Y \nabla f, X > X$$

Use que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_Y \nabla f &= \overline{\nabla}_Y \nabla \widetilde{f} + \overline{\nabla}_Y 2fX \\ &= 2(-y_0, \ldots, -y_{p-1}, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n, -y_{n+1}) + 2fY + 2 < \nabla \widetilde{f}, Y > X\end{aligned}$$

Em seguida considere $Y = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, para deduzir que

$$\nabla_{w_1} \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2+2f)w_1}{2\sqrt{-1+f^2}}$$

$$\nabla_{w_2} \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(-2+2f)w_2}{2\sqrt{-1+f^2}}$$

Logo, $-\dfrac{1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ e $\dfrac{-1+c}{\sqrt{-1+c^2}}$ são a únicas curvaturas principais de $f^{-1}(c)$, contadas com multiplicidades. O resultado segue do seguinte teorema de Cartan (Veja ref. 1)

Diz-se que uma hipersuperfície é *isoparamétrica* se suas curvaturas principais são constantes.

Teorema de Cartan (Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas com duas curvaturas principais distintas num *espaço forma*). *Seja K uma superfície isoparamétrica com curvaturas principais distintas k_1 e k_2 de multiplicidades n_1 e n_2 num $^{n+1}(c)$ espaço de curvatura seccional constante c ($M = \mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$, $M = \mathbb{H}^{n+1}$, se $c = -1$ e $M = \mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$.). Então , segue que K é um cilindro em $^{n+1}(c)$. Em particular, tem-se que para $c = 1$, que K é um mergulho de $\mathbb{S}^{n_1}(\dfrac{1}{\sqrt{k_1^2+1}}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\dfrac{1}{\sqrt{k_2^2+1}})$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

É interessante comparar o resultado acima com o de Nomizu que utilizou a famosa identidade de Cartan para demonstrar o seguinte (Veja ref. 1):

Teorema de Nomizu *Seja K uma hipersuperfície isoparamétrica mergulhada em $^{n+1}(c)$ com k curvaturas principais λ_i distintas. Então , para $c = 0$, k é no máximo igual a 2 e se K possuir duas curvaturas distintas então uma delas é nula. Para $c = -1$, k também é no máximo igual a 2 e se K possuir duas curvaturas distintas k_1 e k_2 então $k_1 k_2 = 1$.*

Combinando os dois resultados acima obtém-se que:

As hipersuperfícies isoparamétricas de $\mathbb{R}^{n+1}$ e de $\mathbb{H}^{n+1}$ são os cilindros e as hipersuperfícies totalmente umbílicas.

g) Mostre que as multiplicidades das m curvaturas principais distintas k_i de uma hipersuperfície isoparamétrica K são constantes. *Sugestão* : Considere $k_1, \ldots, k_{m_1}, k_m, \ldots, n$ as curvaturas principais de K de modo que $k_i \neq 0$, $i < m$. Defina $\nu = m$ se todas as curvaturas principais são distintas de zero e $\nu = m - 1$ se $k_m = 0$. Considere $n_i(x)$ a multiplicidade de k_i em $x \in K$. defina os polinômios

$$p_j(x) := \sum i = 1_i^n(x) k_i^j = \text{traço} A^j$$

onde A é o operador de Weingarten. Observe que $p_j(x)$ são funções constantes (Por quê ?). Mostre que $n_i(x)$ são constantes.

O seguinte teorema de caracterização das hipersuperfícies isoparamétricas é devido a Nomizu (Veja ref. 1)

Seja K uma hipersuperfície mergulhada em $^{n+1}(c)$ e seja $\varphi_t : K \to ^{n+1}(c)$, definida por $\varphi_t(x) = \exp_x(tN)$ e $K_t = \varphi_t(K)$. Se para qualquer t, K_t tem curvatura média constante H_t, então K_t é isoparamétrica.

Nota: No que segue imediatamente, seguiremos o texto da dissertação de mestrado de Marcos Alexandrino (Veja ref. 1). Seja K uma hipersuperfície mergulhada em uma variedade Riemanniana completa M, com conexão ∇. Seja $\gamma(t)$ uma geodésica de M parametrizada pelo comprimento de arco t, tal que $\gamma(0) \in K$ e $\gamma'(0) \in T^{\perp}_{\gamma(0)}K$. Assuma que existe um campo de vetores unitário normal N; tal que $N(\gamma(0)) = \gamma'(0)$.

$*$) Considere $\alpha(s)$ uma curva suave, contida em K tal que $\alpha(0) = \gamma(0)$ e $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, r] \to M$, uma variação de $\gamma(t)$, definida como $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s))$. Mostre que

$$< \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} >_{f(s,t)} = 0$$

Sugestão : Use a simetria da conexão e o fato que as curvas s = const são geodésicas.

$**$) Faça um resumo sobre o conceito de *campo de Jacobi* (Veja refs. 9 e 13).

$***$) Diz-se que um campo de Jacobi $J(t)$, definido ao longo da geodésica $\gamma(t)$ é um K-campo de Jacobi, sse satisfaz às seguintes condições :

a) $< J(t), \gamma'(t) >= 0$.

b) $J'(0) + A(\gamma'(0))J(0) = 0$,

onde A denota a aplicação de Weingarten.

i) Sejam $\alpha(s)$ uma curva em K com $\alpha(0) = \gamma(0)$, $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$ e $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Mostre que $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$. *Sugestão* : Note que como $f(s,t)$ é uma variação por geodésicas então $J(t)$ é um campo de Jacobi (Veja ref. 9). Mostre isto!! Note que $*$) garante o item a) da definição de K-campo de Jacobi. Finalmente note que

$$J'(0) = \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f(0,0)}{\partial s}$$

$$= \frac{D}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f(0,0)}{\partial t}$$
$$= \nabla_{J(0)}\frac{\partial f(s,0)}{\partial t}$$
$$= -A(\gamma'(0))J(0)$$

ii) Mostre que se $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então existe uma curva $\alpha(s)$ em K tal que fazendo $f(s,t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(\alpha(s)))$, $J(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. *Sugestão* : Considere $\alpha(s)$ uma curva em K tal que $\alpha'(0) = J(0)$ e considere $\widetilde{J}(t) = \dfrac{\partial f(0,t)}{\partial s}$. Mostre que $\widetilde{J}(t)$ é um K-campo de Jacobi e note que $\widetilde{J}(0) = J(0)$. Use o item b) da definição de K-campo de Jacobi.

Define-se um ponto $\gamma(r)$ de *ponto focal* de K se existe um K-campo de Jacobi $J(t)$ ao longo de $\gamma(t)$, não identicamente nulo, tal que $J(r) = 0$. Um corolário disto e do que precede é o seguinte: *Seja* $\varphi_r : V \to M$ *definida por* $\varphi_r(x) = \exp_x(rN(x))$. *Então* $\gamma(r)$ *é um ponto focal com multiplicidade* k, *sse* $\gamma(r)$ *é valor crítico de* φ_r, *sendo* k *a dimensão do núcleo de* $d\varphi(\gamma(0))$. O *lema do índice de Morse adaptado*, diz respeito ao índice de uma certa forma quadrática Q_a definida no conjunto de campos diferenciáveis por partes definidos em $\gamma\,\big|_{[0,a]}$, ortogonais à $\gamma'(t)$ e que se anulam em $t = a$. Diz que o *índice* de Q_a é finito e igual ao número de pontos focais de K, contados com suas multiplicidades, ao longo de $\gamma(t)$ para $0 < t < a$ (Veja ref. 9).

6) Considere agora duas hipersuperfícies K e G mergulhadas em uma variedade Riemanniana M de dimensão $n+1$. Assuma que exista um campo unitário N de vetores normais à K. Diz-se que K e G são *paralelas* se existe s tal que a aplicação $\varphi_s(x) := \exp_x(sN(x))$ definida em K seja um difeomorfismo entre K e G.

a) Mostre que se $p \in K, \gamma(t) = \exp_p(tN(p))$ e $J(t)$ é um K-campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$, então $J(t+s)$ é um G-campo de Jacobi.

b) Assuma que $K_t := \varphi_t(K)$ são hipersuperfícies. Dado um ponto $y = \varphi_{t_0}(x)$ de K_{t_0} define-se $N(y) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x)\,\big|_{t=t_0}$. Cada K_t admite uma orientação natural determinada por N. Assuma a existência de uma função

suave $f : M \to \mathbb{R}$ tal que f restrita à cada K_t seja constante. Seja $\widetilde{f}(t) := f(K_t)$. Mostre que

$$\triangle f(p) = \widetilde{f}''(t_0) - n\widetilde{f}'(t_0)H(p) \qquad p \in K_{t_0}$$

Sugestão : Observe que $\nabla f(y) = \widetilde{f}'(t)N$, e que $\nabla_N N(y) = 0$, $y \in K_t$. Considere $\{e_1, \ldots, e_n\}$ referencial local ortornormal em uma vizinhança de p em M tal que em p $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é tangente às direções principais.
Conclua

c) Sejam K_t e f definidos acima. Mostre que se $\triangle f$ é constante em cada K_t então K_t é uma hipersuperfície de curvatura média constante.

Nota (ainda seguindo Marcos Alexandrino, ref. 1): Suponha que $M = ^{n+1}(c)$ uma variedade de curvatura seccional constante c . Assuma que $K_t = \varphi_t(K)$, sejam hipersuperfícies mergulhadas, e portanto paralelas à K. Seja $p \in K, \gamma(t) = \varphi_t(p)$ e seja $\{e_i\}$ uma base ortornormal de direções principais de p associadas às curvaturas principais k_i. A finalidade da presente discussão é determinar as curvaturas principais e as direções principais de K_t em $\gamma(t)$: Tome $\{J_i(t)\}$, n K-campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J_i(0) = e_i$. (Veja o item $***$) acima). O fato de que $J_i''(t) + cJ_i(t) = 0$ (Por quê ?), a definição de um K-campo de Jacobi e a unicidade de campos de Jacobi garantem que :

$$J_i(t) = g_i(t)e_i(t)$$

onde $e_i(t)$ é o transporte paralelo de e_i ao longo de $\gamma(t)$ e $g_i(t)$ é uma função suave que satisfaz às seguintes equações

$$g_i''(t) + cg_i(t) = 0$$
$$g_i'(0) + k_i g_i(0) = 0$$

Logo, se $c = 0, g_i(t) = -k_i t + 1$, se $c = -1, g_i(t) = -k_i \sinh t + \cosh t$, se $c = 1, g_i(t) = -k_i \sin t + \cos t$.

d) Mostre que, nas condições acima, $\{e_i(t)\}$ é uma base ortornormal de direções principais de K_t em $\gamma(t)$ associadas às curvaturas principais $-\dfrac{g_i'(t)}{g_i}$. Calcule as curvaturas principais em cada caso $c = 0, 1, -1$.

Sugestão : Veja item a) acima.

7) (*Classificação das superfícies totalmente umbílicas* de $^{n+1}(c)$) Agora considere K uma hipersuperfície totalmente umbílica completa (conexa) com curvatura principal k de um espaço de formas espaciais $^{n+1}(c)$.
   a) Seja $p \in K$. Dado $v \in T_pK$ define-se Σ_v como sendo o hiperplano totalmente geodésico que contém p tal que $v \in (T_p\Sigma_v)^{\perp}$. Mostre que existe uma vizinhança V de p em $^{n+1}$ tal que $K_v := V \cap K \cap \Sigma_v$, é uma hipersuperfície umbílica de Σ_v, para todo $v \in T_pK$, com curvatura principal k. *Sugestão* : Considere para fixado $v \in T_pK$, um campo unitário η de $T(\Sigma_v)^{\perp}$. Mostre que para todo $X \in T(\Sigma_v)$ tem-se que $\overline{\nabla}_X \eta \equiv 0$. Seja $\alpha(t)$ uma curva parametrizada regular com $\alpha(0) = p$ com $\alpha(t) \in K \cap \Sigma_v$. Seja $\alpha(r) = q$. Mostre que o normal unitário $N(q) \in T_q\Sigma_v$, para todo $q \in K_v$; mostrando que $< N(\alpha(t)), \eta(\alpha(t)) > \equiv 0$. Finalmente, conclua disto, da definição de hipersuperfície umbílica e do fato que $< \overline{\nabla}_X Y, N >= k < X, Y >$, para quaisquer $X, Y \in T_qK$, que K_v é umbílica em Σ_v, como desejado
   b) Seja K uma hipersuperfície (conexa) completa com curvatura principal k em $^{n+1}(c)$. Mostre que se $c = 0, 1$ K é uma hipersuperfície totalmente geodésica ou uma esfera geodésica de $^{n+1}(c)$. Se $c = -1$ mostre que K, visto no modelo do semi-espaço $\mathbb{H}^{n+1}$, é a interseção de $\mathbb{H}^{n+1}$ com um hiperplano ou uma esfera de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Quando $k > 1$ mostre que K é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*Sugestão* : Mostre que basta demonstrar o teorema localmente. Em seguida mostre que se o teorema for verdadeiro para $n = j$ então o resultado no item a) mostra que este será verdadeiro para $n = j + 1$. Mostre que o teorema está confirmado para $n = 2$, pela classificação das curvas de curvatura constante.

8) Seja f uma função suave em uma variedade riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n + 1$ e seja M uma subvariedade de $\overline{M}$ de dimensão k. Sejam $\overline{\nabla}$ e $\overline{\triangle}$ a conexão e o Laplaciano sobre $\overline{M}$, respectivamente. Seja $\triangle$ o laplaciano sobre M. Finalmente, seja $\vec{H}$ o vetor curvatura média de M definido pela equação

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\nabla}_{\bar{e_i}} \bar{e_i} = k \overrightarrow{H} + \sum_{i=1}^{k} \nabla_{e_i} e_i,$$

onde $e_1, \ldots, e_k$ é um campo de vetores ortornormais numa vizinhança de um ponto p de M e $\bar{e_1}, \ldots, \bar{e_{n+1}}$ é uma extensão ortornormal suave destes campos

à uma vizinhança de p em $\overline{M}$.

a) Mostre que $\triangle f = \sum_{i=1}^{k} (e_i\, e_i f - \nabla_{e_i} e_i f)$

b) Mostre que $< \nabla f, \nabla_{e_i} e_i >= \nabla_{e_i} e_i f$. Interprete o termo da direita da igualdade.

c) Mostre que $\triangle f = \overline{\triangle} f + k\vec{H} f - \sum_{j=k+1}^{n+1} (\bar{e_j}\bar{e_j} f - \overline{\nabla}_{\bar{e_j}} \bar{e_j} f)$

d) Suponha que M é imagem inversa de um valor regular de f e que as trajetórias do gradiente que partem de $p \in M$ são geodésicas. Interprete e expresse a fórmula do item anterior neste caso .

9)

a) Mostre o seguinte teorema devido a E. Hopf: Seja M uma variedade Riemanniana orientável compacta (sem bordo) e conexa. Seja f uma função suave em M com $\triangle f \geqslant 0$. Mostre que f = const. *Sugestão*: Aplique o teorema da divergência duas vezes, primeiramente a $\triangle f$, em seguida a $\triangle f^2$. Ou ainda aplique diretamente o princípio do máximo.

b) Seja $X : M \to \bar{M}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta (sem bordo) M de dimensão n em uma variedade $\bar{M}$ de dimensão $n+1$. Sejam f, g funções suaves e Y um campo suave em M.

i) Mostre que $\operatorname{div} f \cdot Y = f \cdot \operatorname{div} Y + \langle \nabla f, Y \rangle$, onde ∇ é o gradiente sobre M e div é a divergência sobre M.

ii) Mostre que $\triangle(f \cdot g) = f \cdot \triangle g + g \cdot \triangle f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$, onde $\triangle$ é o Laplaciano sobre M.

iii) Mostre que

$$\int_M (f \triangle g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle)\, \mathrm{d}M = 0$$

se $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ então deduza a fórmula de Minkowski

$$\int_M (1 + H(\langle X, N \rangle)\, \mathrm{d}M = 0$$

onde N é um campo de vetores normal unitário a M e H é a curvatura média calculada com respeito a N.

10) Seja $\overline{M}(c)$ uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de dimensão $n+1$ com curvatura seccional constante c. Seja $X : M \to \overline{M}(c)$ uma imersão isométrica. Seja A o operador de Weingarten associado à um

normal global N. Sejam $k_1, \ldots, k_n$ as curvaturas principais da imersão (que são exatamente os auto-valores de A). As funções simétricas de curvatura associadas à A, podem ser definidas usando o polinômio característico de A por

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \, S_r t^{n-r}$$

As transformações de Newton P_r são definidas indutivamente por

$$\begin{aligned} P_0 &= I \\ P_r &= S_r I - A \cdot P_{r-1} \end{aligned}$$

Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortornormal de autovetores de A correspondendo, respectivamente, aos auto-valores $k_1, \ldots, k_n$. Representaremos por A_i a restrição da transformação A ao sudespaço normal à e_i e por $S_r(A_i)$ a r- ésima função simétrica associada à A_i.. Definamos $S_{n+1} = 0$.

a) Mostre as seguintes igualdades: Para cada $1 \leqslant r \leqslant n-1$, vale

i) $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i \qquad \forall \quad 1 \leqslant r \leqslant n.$

ii) traço$(P_r) = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n-r)S_r$

iii) traço$(AP_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(A_i) = (r+1)S_{r+1}$

iv) traço$(A^2 P_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 S_r(A_I) = s_1 s_{R+1} - (R+2)s_{R+2}$.

b) Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave sobre M. Defina L_r o *operador linearizado de* S_{r+1} por

$$L_r f = \operatorname{div}(P_r \nabla f)$$

Mostre que

$$\int_M (f \, L_r g + \langle P_r \nabla f, \nabla g \rangle) \, \mathrm{d}M = 0$$

c) Suponha $c = 0, 1,$ ou -1. Interprete X como sendo o *o vetor posição* de M em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1},$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$. Definamos H_r pela equação $S_r := \binom{n}{i} H_r$.

i) Mostre as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned} L_r(X) &= -\big((r+1)S_{r+1}\big)N - c(n-r)S_r X \\ &= -c_0(r)\,(H_{r+1}\,N + c\,H_r X) \end{aligned}$$

ii) Quando S_{r+1} é constante, mostre que

$$L_r N = -\big(S_1\, S_{r+1} - (r+2)\, S_{r+2}\big) N - c\,(r+1)\, S_{r+1} X$$

iii) Suponha que M seja uma hipersuperfície fechada. Mostre as fórmulas de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1},$ e $\mathbb{H}^{n+1}$

$$\int_M (H_{r+1}\ N + c\ H_r\ X)\, \mathrm{d}M = 0$$

11) Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um gráfico de uma função suave $x_{n+1} = u(x_1, \ldots, x_n)$ sobre um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$. Considere a parametrização natural $X : \Omega \to M$ dada por $X(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))$. Seja $X_1, \ldots, X_n$ o referencial adaptado (global) a X. Seja (g_{ij}) a matriz da primeira forma fundamental associada a X. Sejam ∇ o gradiente e $\triangle$ o Laplaciano sobre M. Seja $H = H(x_1, \ldots, x_n, u)$ a curvatura média de M calculada com respeito ao normal unitário N que aponta para "cima", i.e para o sentido dos x_{n+1} crescente. Mostre que

a) $g_{ij} = \delta_{ij} + u_i u_j$, $g = \det g_{ij} = W(u)^2 := 1 + |Du|^2$ e $N = (v_1, \ldots, v_{n+1})$, onde u_i denota diferenciação com respeito a x_i e $v_i = \dfrac{-u_i}{W(u)}, i < n+1$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{W(u)}$. Além disto, $g^{ij} = \delta^{ij} - v_i v_j$.

b) Se $\psi : M \to \mathbb{R}$ é suave, então (omitindo o símbolo do somatório, seguindo a convenção usual)

$$\triangle \psi = g^{ij} D_i D_j \psi + W(u)^{-1} D_i (W(u) g^{ij}) D_j \psi$$

onde D_i significa diferenciação com respeito a x_i. Conclua que

$$\triangle \psi = g^{ij} D_i D_j \psi + nH v_j D_j \psi \quad \text{e daí } \triangle u = \frac{nH}{W(u)}.$$

c) Também verifique que

$$\begin{aligned} \nabla H &= g^{ij} D_j H X_i \qquad \text{e daí} \\ \langle \nabla H, (0, \ldots, 1) \rangle &= g^{ij} D_j H u_i \\ &= g^{ij} \left(H_{x_j} + H_z u_j\right) u_i \\ &= H_z |\nabla u|^2 + g^{ij} u_i H_{x_j} \\ &= -v_{n+1} \left(v_i H_{x_i} - H_z |Du|^2 v_{n+1}\right) \end{aligned}$$

d) Seja v um vetor de $\mathbb{R}^{n+1}$. Então

$$\triangle\langle N, v\rangle = -2\langle \nabla H, v\rangle - \|A\|^2 \langle N, v\rangle$$

onde $\|A\|^2$ é o quadrado da segunda forma fundamental de M, definido por $\|A\|^2 := \text{traço}\, A^2$. *Sugestão*: Use um referencial geodésico em $p \in M$. Conclua

$$\begin{aligned}\triangle v_{n+1} + \|A\|^2 v_{n+1} &= -2\langle \nabla H, (0, \ldots, 1)\rangle \\ &= 2v_{n+1}\left(v_j H_{x_j} - |Du|^2 v_{n+1} H_z\right)\end{aligned}$$

12) Elabore um resumo da fórmula da primeira e segunda variação da energia (Veja refs. 9 e 13).

a) Seja M uma variedade Riemanniana completa. Seja $N \subset M$ uma subvariedade fechada. Seja $p \in M - N$. Mostre que existe uma geodésica minimizante $\gamma, \gamma(0) = p, \gamma(l) \in N$, de modo que $\text{dist}(p, N) = \text{compr}(\gamma) = l$. Além disto,$\gamma'(l) \perp N$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!): Seja $l = \text{dist}(p, N)$. Note que o disco geodésico $\overline{B}_{l+1}(p)$, de centro P e raio $l+1$ é compacto e que $K := \overline{B}_{l+1}(p) \cap N \neq \emptyset$. Mostre que $x \mapsto \text{dist}(p, x)$ atinge um mínimo sobre K. $\Longrightarrow \exists q \in N; \text{dist}(p, q) = l$. Seja γ uma geodésica minimizante ligando p a q (por que existe?). Seja $\beta(s)$ uma curva em N; $\beta(0) = q$. Seja $p_1 \in U \cap \gamma([0, l])$, onde U é uma vizinhança normal de q. Seja $\tilde{\beta} \subset T_{p_1}M$ definida por $\tilde{\beta}(s) = \exp_{p_1}^{-1}\big(\beta(s)\big)$. Claro que $\tilde{\beta}(s)$ está apenas definida para s suficientemente pequeno (por quê ?). Faça um desenho!!. Defina $f(s,t) = \exp_{p_1}\big(t \cdot \tilde{\beta}(s)\big), f(s,0) = p_1, f(s,1) = \beta(s)$. Sendo a geodésica γ_1, definida como sendo a restrição de γ ao arco entre p_1 e q, minimizante $\Longrightarrow \text{compr}\big(f(s_0,t)\big) \geqslant \text{compr}\big(f(0,t)\big) \forall s_0$, fazendo variar t de 0 a 1 (Por quê ?). Aplique a fórmula da primeira variação da energia para concluir o resultado (faça um desenho!!).

b) Seja M uma superfície completa de curvatura de Gauss estritamente positiva. Sejam γ_1, γ_2 duas geodédicas simples e fechadas de M. Mostre que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. *Sugestões* (complete *todos* os detalhes !!) : Caso contrário, $\exists$ geodésica γ; $\text{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \text{compr}(\gamma) = l$. Pelo resultado anterior $\gamma_1, \gamma_2 \perp \gamma$. Seja $V(0) = \gamma_1'(\gamma(0))$ e $V(t)$ o transporte paralelo de $V(0)$ ao longo de γ à $V(l) = \gamma(l) = q$. Considere $f(s,t) = \exp_{\gamma(t)}\big(s \cdot V(t)\big), \quad -\varepsilon < s < \varepsilon$.

Note que $f(s,0)=\gamma_1(s), f(s,l)=\gamma_2(s)$. Mostre que a fórmula da segunda variação, após algumas considerações e cálculos fica:

$$\frac{1}{2}\ddot{E}(0) = -\int_0^1 K\cdot l^2.$$

Conclua daí o resultado desejado.

13) Consideremos o modelo da bola tridimensional do espaço hiperbólico dado por $B=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2<1\}$. Considere uma superfície de revolução gerada por uma curva c contida no disco aberto $D=\{(u,v,w)\}\in B \;\big|\; w=0\}$. Seja $p\in D$, seja γ a unica geodésica passando por p e ortogonal à geodésica horizontal $\{v=0\}$. Seja q a intersecção entre estas duas geodésicas. Então x é igual 'a distância hiperbólica entre q e 0, e y é o comprimento orientado de γ entre p e q. Isto significa que $x\geqslant 0$ (resp. $y\geqslant 0$) $\Leftrightarrow$ $u\geqslant 0$ (resp.$v\geqslant 0$), onde (u,v) são as coordenadas euclideanas de p. Mostre que

a) A métrica de D neste sistema de coordenadas (x,y) é dada por $\mathrm{d}s^2=\cosh^2(y)dx^2+dy^2$.

b) Sejam e_x e e_y os campos de vetores unitários na direção de x e y, respectivamente. Seja $t(s)$ o campo unitário tangente à c no sentido do movimento (s parâmetro comprimento de arco). Seja $n(s)$ o normal unitário apontando para o sentido dos y crescentes. Seja α o ângulo orientado de $t(s)$ à e_y. Faça uma figura !!. Mostre as seguintes relações

$$\begin{aligned}
e_x &= \frac{1}{\cosh y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\\
\sin\alpha = \cosh y\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},&\quad \cos\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\
n(s) &= -\cos\alpha\, e_x+\sin\alpha\, e_y\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} &= \frac{-\cos\alpha}{\cosh y}\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\\
\dot{c} &= \frac{\sin\alpha}{\cosh y}\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

c) Suponha que $f(s,t)$, $a\leqslant s\leqslant b$, $0\leqslant t<\delta$ seja uma dada variação própria de $c(s)$, i.e, $f(s,0)=c(s)$ e $f(a,t)=c(a)$, $f(b,t)=c(b)$. Seja $g:=\cosh y$.

i) Mostre que o *campo variacional* é dado por $V(s) = g\cdot(\partial x \,/\, \partial t)_0\, e_x + (\partial y \,/\, \partial t)_0\, e_y$ $(g = \cosh y)$.

ii) Mostre que a fórmula da primeira variação fica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, L_c(t)\big|_{t=0} = -\int_a^b \left\{ \left(2gg' \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + g^2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_0 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} - gg' \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_0 \right\} \mathrm{d}s$$

iii) Conclua *à partir da fórmula da primeira variação* que esta determina a curvatura geodésica de c, e infira dos itens anteriores que a curvatura (geodésica) de c, com respeito ao normal n é dada por

$$k(s) = -\frac{d\alpha}{ds} - \tanh y\, \sin\alpha.$$

Mostre que isto dá uma curvatura principal $k_1 = k$ da superfície de revolução gerada por c.

iv) Mostre que a outra curvatura principal k_2 é dada por $k_2 = -\sin\alpha\, \coth y$.

d) Considere um sistema de coordenadas de B dado por x, y, θ, onde θ é o ãngulo de rotação em torno do eixo x.

i) Mostre que a métrica de B neste sistema de coordenadas se escreve como $\mathrm{d}s^2 = \sinh^2 y\, \mathrm{d}\theta + \cosh^2 y\, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$

ii) Considere $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$, os campos adaptados a este referencial. Seja $\nu := \dfrac{1}{\|\frac{\partial}{\partial \theta}\|} \dfrac{\partial}{\partial \theta}$. Mostre que

$$\nabla_{\dot c}\dot c = -\big(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + \sin\alpha\, \tanh y\big) n$$
$$\nabla_\nu \nu = -\coth y\, \frac{\partial}{\partial y}$$

Usando estas fórmulas re-obtenha as curvaturas principais k_1 e k_2 obtidas no item (c),(iii),(iv).

e) Mostre que se a curva c é o gráfico de uma função positiva $y = y(x)$, então as curvaturas principais da superfície de revolução gerada por c

são dadas por:

$$k_1 = \frac{y''\,\cosh y - 2\sinh y\, y' - \sinh y\,\cosh^2 y}{(\cosh^2 y + y'^2)^{3/2}} \qquad \text{e}$$

$$k_2 = -\frac{\cosh^2 y}{\sinh y(\cosh^2 y + y'^2)^{1/2}}$$

f) Encontre uma integral primeira da equação da curvatura média constante no espaço hiperbólico de uma curva geratriz de uma superfície de revolução, mostrando que

$$\frac{v\,\cosh^2 y}{\sqrt{(cosh^2 y + y'^2)}} - 2H\,u = \text{const}$$

onde $v = c\sinh y$, c = comprimento do círculo hiperbólico unitário e $u = \dfrac{c\,(\sinh y)^2}{2}$.

14) Considere $\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n);\ x_n > 0)\}$ o modelo do semi-espaço do espaço hiperbólico munido da métrica $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{1}{x_n}\,(dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$. Seja $\mathcal{P}$ o hiperplano totalmente geodésico dado por $\mathcal{P} = \{x_0 = 0\}$. Seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ um domínio de $\mathcal{P}$. Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}$ Seja N um campo de vetores unitários (na métrica hiperbólica) normal à M.

a) Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, uma curva paramerizada por comprimento de arco (hiperbólico). Seja κ_N a curvatura normal de α com respeito à N. Reparametrizando α pelo parâmetro comprimento de arco euclideano (visto M como hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$), obtemos uma curva β. Considere a curvatura normal k_{N} de β com respeito ao campo de vetores N unitários (na métrica euclideana) normal à M. Mostre a seguinte relação:

$$\kappa_N = k_{\mathrm{N}}\, x_n + \mathrm{N}_n$$

onde N_n representa a última componente de N.

b)

i) Deduza à partir da fórmula anterior a equação da curvatura média pré -determinada H de um *gráfico horizontal* dado por uma função $x_0 = u(x_1, \ldots, x_n)$ definida sobre um domínio $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.

ii) Idem para a equação da curvatura média pré-determinada H de um *gráfico vertical* dado por uma função $x_n = u(x_0, \ldots, x_{n-1})$ definida sobre um domínio $\Omega \subset \partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

iii) Mostre um teorema tipo Olinde Rodrigues para superfícies M em $\mathbb{H}^3$. Mostre também que a semi-soma das curvaturas normais em um ponto $p \in M$, para qualquer par de direções ortogonais é igual a curvatura média $H(p)$ de M em p.

iv) Mostre que as linhas principais de M em $\mathbb{H}^{n+1}$ e de M em $\mathbb{R}^{n+1}$ *coincidem*. Conclua que M é totalmente umbílica em $\mathbb{H}^{n+1} \Leftrightarrow M$ é totalmente umbílica em $\mathbb{R}^{n+1}$. Dê a classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Dê também outra demonstração deste fato.

c) Deduza a classificação das superfícies isoparamétricas de $\mathbb{H}^3$, seguindo o seguinte roteiro : Seja $p \in M$, um ponto não umbílico de uma superfície M em $\mathbb{H}^3$.

(i) Mostre que existe um referencial ortornormal $\{X_1, X_2\}$ numa vizinhança de p *principal*, i.e, $AX_i = k_i\, X_i, i = 1, 2$, onde A é o *operador de Weingarten* que representa a segunda forma fundamental de M.

ii) Seja ∇ a conexão de M. Mostre que as quantidades $\nabla_{X_2} X_1$, $\nabla_{X_1} X_2$, $\nabla_{X_1} X_1$, $\nabla_{X_2} X_2$ estão determinadas por funções a, b que dependem apenas de k_1, k_2 e das suas derivadas com respeito a X_1, X_2. Precisamente, mostre que numa vizinhança u de p:

$$(1)\quad \begin{cases} \nabla_{X_2} X_1 = b\, X_2 & \nabla_{X_1} X_2 = a\, X_1 \\ \nabla_{X_2} X_2 = -b\, X_1 & \nabla_{X_1} X_1 = -a\, X_2 \end{cases} \qquad [X_1, X_2] = a\, X_1 - b\, X_2$$

onde $a = \dfrac{X_2(k_1)}{k_2 - k_1}$ e $b = -\dfrac{X_1(k_2)}{k_2 - k_1}$. Além disto, mostre que

$$\begin{aligned} K_e := k_1\, k_2 = {} & \frac{(X_1^2(k_2) - X_2^2(k_1))(k_2 - k_1)}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_1(k_2)(2X_1(k_2) - X_1(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} \\ & + \frac{X_2(k_1)(X_2(k_2) - 2X_2(k_1))}{(k_2 - k_1)^2} + 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

em U. *Sugestões*: As equações (1) seguem da compatibilidade, da simetria e das equações de Codazzi. Enquanto que a equação (2) segue da equação de curvatura de Gauss.

iii) Mostre que existe um sistema de coordenadas principais numa vizinhança de p. *Sugestão*: Basta mostrar que existem campos $Y_1 = f\,X_1$ e $Y_2 = g\,X_2$; tais que $[Y_1, Y_2] = 0$. Conclua que uma superfície isoparamétrica (i.e todas as curvaturas principais são constantes), *não umbílica* é um cilindro hiperbólico.

15) Neste item serão abordados algumas aplicações do princípio do máximo e do princípio de reflexão de Alexandrov.

a) Mostre que uma superfície propriamente mergulhada em $\mathbb{H}^3$ de curvatura média constante cujo bordo assimptótico é um ponto é uma horosfera. E se o bordo assimptótico for um círculo ? E se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

b) Mostre que o seguinte *teorema de Hsiang*: Uma superfície propriamente mergulhada de $\mathbb{H}^{n+1}$ contida dentro de um cilindro, com curvatura média constante é uma hipersuperfície de revolução. O que você pode dizer, sob as mesmas condições , se a superfície é uma superfície especial de Weingarten ?

c) Mostre que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém discos de raios arbitrariamente grandes então não existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e um número positivo $c > 0$ tal que a curvatura média H do gráfico de f satisfaça $H \geqslant c > 0$

d) Mostre que não existe um gráfico vertical mínimo em $\mathbb{H}^{n+1}$ sobre um semi- espaço fechado do bordo assimptótico $\partial_\infty \mathbb{H}^{n+1}$.

16) Elabore um resumo sobre as relações entre uma superfície de curvatura média 1 em $\mathbb{H}^3$ e as superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$.

BIBLIOGRAFIA

1) M. Alexandrino. *Hipersuperfícies de nível de uma função transnormal.* Dissertação de mestrado, PUC-Rio, 1997.

2) A. D. Alexandrov. *Uniqueness theorems for surfaces in the large.* I, (Russian)

Vestnik Leningrad Univ. Math. **11**, 5-17 (1956).

3) J. L. Barbosa and R. Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in* $H^{n+1}(-1)$ *with convex planar boundary*, I. Geom. Dedicata, **71**, 61-74, (1998).

4) J. L. Barbosa and R. Sa Earp. *Prescribed mean curvature hypersurfaces in* H^{n+1} *with convex planar boundary*, II. Séminaire de théorie spectrale et géometrie de Grénoble **16**, 43-79, (1998).

5) M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet. *Le spectre d'une variété Riemanniene*. Lecture Notes **194**, Springer, 1971.

6) F. Braga Brito and R. Sa Earp. *On the Structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle*. An. Fac. Sci. Toulouse **VI**, No 2, 243-255, (1997).

7) R. Bryant. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*; Asterisque **154-155** , Soc. Math de France , 321-347 , (1987).

8) R. Bryant. *Complex analysis and a class of Weingarten surfaces*. Preprint.

9) M. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 1988 (segunda edição).

10) P. Castillon. *Sur les sous-variétés à courbure moyenne constante dans l'espace hyerbolique*. Doctoral Thesis, Université Joseph Fourier (Grénoble I), (1995).

11) P. Collin. *Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de* R^3. Ann. Math. 2nd Series **145**, 1-31, (1997).

12) M.P. Do Carmo, H.B. Lawson Jr. *On Alexandrov - Bernstein theorems in hyperbolic space*. Duke Math. J. **50**, No. 4, (1983).

13) S. Gallot, D. Hulin e J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer, 1987.

14) D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, (1983).

15) J. M. Gomes. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Doctoral thesis, IMPA (1985).

16) E. Hebey. *Introduction àl'analyse non linéaire sur les varié tés*. Diderot Editeur, (1997).

17) N. Hicks. *Notes on differential geometry*. Van Nostrand, 1965.

18) D. Hoffman and W. Meeks. *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*. Inventiones Math. **101**, 373-377, (1990).

19) H. Hopf. *Differential geometry in the large*. Lect. Notes in Math., Springer, **1000**, (1983).

20) W-Y Hsiang. *On generalization of theorems of A. D. Alexandrov and C. Delaunay on hypersurfaces of constant mean curvature*. Duke Math. J. **49**, No.3, (1982).

21) N. Korevaar, R. Kusner and B. Solomon. *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*. J. Diff. Geom. **30**, 465-503, (1989).

22) N. Korevaar, R. Kusner, W.H. Meeks III and B. Solomon. *Constant mean curvature surfaces in hyperbolic Space*. Amer. J. Math. **114**, 1-143, (1992).

23) N. Korevaar. *Sphere theorems via Alexandrov for constant Weingarten curvature hypersurfaces–appendix to a note of A. Ros*. J. Diff. Geom. **27**, 221-223, (1988).

24) R. Kusner. *Global Geometry of Extremal Surfaces in Three-Space*, Doctoral Thesis, University of California, Berkeley (1985).

25) S. Lang. *Differential manifolds*. Springer, 1985.

26) B. Lawson. *Complete minimal surfaces in* S^3. Ann. Math. **92**, 335-374, (1970).

27) R. Langevin and H. Rosenberg. *A maximum principle at infinity for minimal surfaces and applications*. Duke Math. J. **57**, 819-828, (1988).

28) B. Nelli and R. Sa Earp. *Some Properties of Hypersurfaces of Prescribed Mean Curvature in* H^{n+1}. Bull. Sc. Math. **120**, No 6, 537-553 (1996).

29) J. Ordóñes. *Superfícies helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensionais*. Doctoral Thesis, PUC-Rio, (1995).

30) H. Rosenberg. *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*. Bull. Sc. Math. 2^e série **117**, 211-239 (1993).

31) R. Sa Earp and E. Toubiana. *Some applications of maximum principle to hypersurfaces in Euclidean and hyperbolic space*. In: New Approaches in

Nonlinear Analysis (edited by Th.Rassias), Hadronic Press, U.S.A., 183-202, (1999).

32) R. Sa Earp and E. Toubiana. *Existence and uniqueness of minimal graphs in hyperbolic space*. To appear in the Asian Journal of Mathematics (new Journal), (Editors-in-Chief : S-T Yau (Harvard) e R. Chan (Hong Kong)), **4**(3), 2000. International Press.

33) R. Sa Earp and E. Toubiana. *On the Geometry of Constant Mean Curvature One Surfaces in Hyperbolic Space*. To appear in the Illinois J. Math.

34) R. Schoen. *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*. J. Diff. Geom. **18**, 791-809, (1983).

35) M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Publish or Perish Volume IV, second edition, (1979).

36) F. Warner. *Foundations of differentiable manifold and Lie Groups*. SSpringer, 1986.